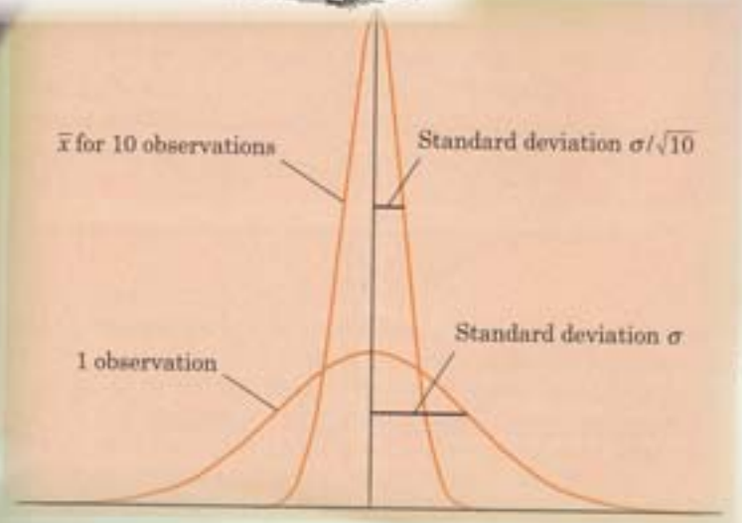
අ.පො.ස. (උසස් පෙළ)

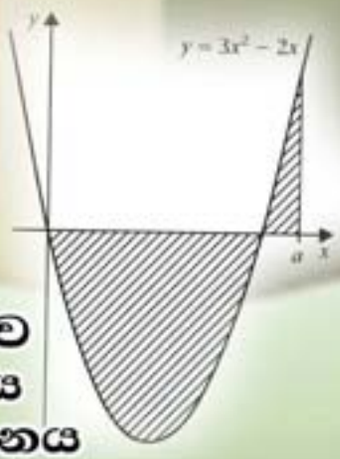
ගණිතය

13 වන ශ්‍රේණිය

ගුරු මාර්ගෝපදේශ සංග්‍රහය

(2010 වසරේ සිට ක්‍රියාත්මක වේ)





ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
මහරගම
ශ්‍රී ලංකාව

Cover Design - E. L. A. K. Liyanage

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ)

ගණිතය

ගුරු මාර්ගෝපදේශ සංග්‍රහය

13 වන ශ්‍රේණිය

(2010 වසරේ සිට ක්‍රියාත්මක වේ)

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
මහරගම
ශ්‍රී ලංකාව

ගණිතය

ගුරු මාර්ගෝපදේශ සංග්‍රහය

13 වන ශ්‍රේණිය (2010)

ISBN

ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

වෙබ් අඩවිය : www.nie.lk

මුද්‍රණයඃ

උපදේශනය

ආචාර්ය උපාලි එම්. සේදර
අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

විමල් සියඹලාගොඩ මයා
සහකාර අධ්‍යක්ෂ ජනරාල්, විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

අධීක්ෂණය

ලාල්. එච්. විජේසිංහ මයා
අධ්‍යක්ෂ - ගණිත දෙපාර්තමේන්තුව
විද්‍යා හා තාක්ෂණ පීඨය
ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය

සම්බන්ධීකරණය

කේ. ගනේෂලිංගම් මයා
12 - 13 ගණිත ව්‍යාපෘති කණ්ඩායම් නායක

විෂයමාලා කමිටුව

12- 13 ශ්‍රේණි ගණිතය ව්‍යාපෘති කණ්ඩායම

කේ. ගනේෂලිංගම් මයා	-	ප්‍රධාන ව්‍යාපෘති නිලධාරී
ජී. පී. එච්. ජගත් කුමාර මයා	-	ව්‍යාපෘති නිලධාරී
එම්. එන්. පී. පීරිස් මිය	-	ව්‍යාපෘති නිලධාරී
ජී. එල්. කරුණාරත්න මයා	-	ව්‍යාපෘති නිලධාරී
ඩබ්. අයි. ජී. රත්නායක මිය	-	ව්‍යාපෘති නිලධාරී
එස්. රාජේන්ද්‍රන් මයා	-	ව්‍යාපෘති නිලධාරී
දීප්ති ගුණවර්ධන මෙය	-	ව්‍යාපෘති නිලධාරී

විෂයමාලා සංස්කරණය

1. පී. ඩයස් මයා	-	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත අධ්‍යයනාංශය ශ්‍රී ජයවර්ධනපුර විශ්වවිද්‍යාලය
2. ජී. ජේ. කපිල ද සිල්වා මයා	-	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත අධ්‍යයනාංශය ශ්‍රී ජයවර්ධනපුර විශ්වවිද්‍යාලය
3. කේ. කේ. ඩබ්ලිව්. ඒ. සරත් කුමාර මයා	-	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ගණිත අධ්‍යයනාංශය ශ්‍රී ජයවර්ධනපුර විශ්වවිද්‍යාලය
4. ආචාර්ය එස්. ටී. ඩබ්ලිව්. එස්. යපා	-	ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, තීරණ විද්‍යා දෙපාර්තමේන්තුව, ශ්‍රී ජයවර්ධනපුර විශ්වවිද්‍යාලය

භාෂා සංස්කරණය

ටී. එච්. ගුණරත්න සිල්වා මයා
උපගුරු, බෝමිරිය මධ්‍ය මහා විද්‍යාලය, කඩුවෙල

පරිගණක වදන් සැකසුම

ඩබ්. එම්. ධම්මිකා මිය
එස්. පී. ලියනගේ මිය

පටුන

පළමුවැනි වාරය

13 ශ්‍රේණිය - පළමුවැනි වාරය - ගණිතය I

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
5.0		**සංකරණ හා සංයෝජන**	12
	1. ගණන් කිරීමේ මූලධර්මය පැහැදිලි කරයි.	ගණන් කිරීම පිළිබඳ මූලධර්මය: යම් කර්මයක් සිදු කළ හැකි ආකාර m ද ඒ ආකාර m හි එක එකක් සඳහා තවත් කර්මයක් සිදු කළ හැකි ආකාර n ද නම් මේ කර්ම දෙකම අනුපිළිවෙළින් සිදු කළ හැකි ආකාර ගණන $m \times n$ වේ. උදාහරණ මගින් විදහා දක්වන්න.	
	2. ක්‍රමාරෝපිත අංකනය අර්ථ දක්වයි.	ක්‍රමාරෝපිත n අර්ථ දැක්වීම: මෙහි n යනු ඍණ නොවන නිඛිලයකි. සාමාන්‍ය ආකාරය: $\lfloor 0 = 1$ $\lfloor n = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$ සහානුයාත ආකාරය: $F(0) = 1$ $F(n) = n\,F(n-1)$	
	3. ${}^{n}p_{n}$ අර්ථ දක්වා ${}^{n}p_{n}$ සඳහා සූත්‍රයක් ලබා ගනියි.	එකිනෙකට වෙනස් ද්‍රව්‍ය n අතුරෙන් සියල්ල ම ගෙන සෑදිය හැකි සංකරණ ගණන ${}^{n}p_{n}$ ලෙස අර්ථ දක්වා ${}^{n}p_{n} = 1$ බව ලබා ගන්න. මෙහි n යනු ධන නිඛිලයකි.	
	4. ${}^{n}p_{r}$ අර්ථ දක්වා ${}^{n}p_{r}$ සඳහා සූත්‍රයක් ලබා ගනියි.	එකිනෙකට වෙනස් ද්‍රව්‍ය n අතුරෙන් වරකට r බැගින් ගෙන $(0 \le r \le n)$ සෑදිය හැකි සංකරණ ගණන ${}^{n}p_{r}$ ලෙස අර්ථ දක්වා ${}^{n}p_{r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$ ලබා ගන්න.	
	5. පුනරාවර්තනයට නිදහස ඇති විට වෙනස් ද්‍රව්‍යවල සංකරණ සොයයි.	ද්‍රව්‍ය පුනරාවර්තනයට ඉඩ ඇති විට එකිනෙකට වෙනස් ද්‍රව්‍ය n අතුරෙන් වරකට $r\,(0 \le r \le n)$ බැගින් ගෙන සෑදිය හැකි සංකරණ ගණන n^{r} බව පෙන්වන්න.	
	6. ද්‍රව්‍ය n සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් නොවන විට සංකරණ සොයයි.	එකිනෙකට සමාන ද්‍රව්‍ය r ද, ඉතිරි ඒවා එකිනෙකට වෙනස් ද වන විට ද්‍රව්‍ය n වලින් සෑදිය හැකි සංකරණ ගණන $\frac{\lfloor n}{\lfloor r}$ බව පෙන්වන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	7. වෘත්තාකාර සංකරණ විස්තර කරයි.	එකිනෙකට වෙනස් ද්‍රව්‍ය වෘත්තයක පිළියෙල කළ හැකි සංකරණ ගණන ⊕ $\lfloor n-1$ දක්ෂිණාවර්ත හෝ වාමාවර්ත අත කෙරෙහි සැලකිල්ලක් දක්වන විට $n \geq 1$. ⊕ $\frac{\lfloor n-1}{2}$ දක්ෂිණාවර්ත හෝ වාමාර්ත අත කෙරෙහි සැලකිල්ලක් නොදක්වන විට මෙහි $n > 2$ සටහන: $n=1$ හෝ $n=2$ විට සංකරණ ගණන 1 වේ.	
5.2	1. ${}^nC_r$ අර්ථ දක්වා, ${}^nC_r$ සඳහා සූත්‍රයක් ලබා ගනියි.	එකිනෙකට වෙනස් ද්‍රව්‍ය n අතුරෙන් වරකට r බැගින් ගෙන සෑදිය හැකි සංයෝජන ගණන ${}^nC_r$ ලෙස අර්ථ දක්වා ${}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$ ලබා ගන්න. ⊕ ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ⊕ ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ බව පෙන්වන්න.	15
	2. සංකරණ හා සංයෝජන අතර වෙනස පැහැදිලි කරයි.	සංකරණවල දී අනුපිළිවෙළ සැලකිල්ලට ගනු ලබන නමුත් සංයෝජනවල දී අනුපිළිවෙළ නොසලකා හරින බව උදාහරණ මගින් පැහැදිලි කරන්න. එකිනෙකට වෙනස් ද්‍රව්‍ය n වලින් වරකට ඕනෑම ගණනක් බැගින් ගෙන සෑදිය හැකි මුළු සංකරණ ගණන $2^n - 1$ බව පෙන්වන්න. සංකරණ හා සංයෝජන ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
13.0	වැඩි වන ශ්‍රිත හා අඩු වන ශ්‍රිත හඳුන්වයි.	කලනය **වැඩි වන ශ්‍රිත අර්ථ දැක්වීම** (a,b) තුළ අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය සලකන්න. ⊕ සියලු $x_1, x_2 \in (a,b)$ සඳහා $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ වන විට f ශ්‍රිතය (a,b) තුළ එක විට වැඩි වන ශ්‍රිතයක් යැයි කියනු ලැබේ.	06

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		⇑ සියලු $x_1\ x_2 \in (a,b)$ සඳහා $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ වන විට f ශ්‍රිතය (a,b) තුළ නිතිමතින් වැඩි වන ශ්‍රිතයක් යැයි කියනු ලැබේ. **අඩු වන ශ්‍රිත අර්ථ දැක්වීම** (a,b) තුළ අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය සලකන්න. ⇓ සියලු $x_1, x_2 \in (a,b)$ සඳහා $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ වන විට f ශ්‍රිතය තුළ අඩු වන ශ්‍රිතයක් යැයි කියනු ලැබේ. ⇑ සියලු $x_1, x_2 \in (a,b)$ සඳහා $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ වන විට f ශ්‍රිතය (a,b) තුළ නිතිමතින් අඩු වන ශ්‍රිතයක් යැයි කියනු ලැබේ.	
	2. වැඩි වන ශ්‍රිත හා අඩු වන ශ්‍රිත ව්‍යුත්පන්න භාවිතයෙන් පහදයි.	(a,b) ප්‍රාන්තරය තුළ අවකල්‍ය f ශ්‍රිතය සලකමු. සියලු $x \in (a,b)$ සඳහා $f'(x) > 0$ නම් එවිට f යනු (a,b) තුළ වැඩි වන ශ්‍රිතයකි.. සියලු $x \in (a,b)$ සඳහා $f'(x) < 0$ නම් එවිට f යනු (a,b) තුළ අඩු වන ශ්‍රිතයකි.	
	3. ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය පැහැදිලි කරයි.	(a,b) තුළ අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය සලකමු. $f^1(c) = 0$ වනසේ $c \in (a,b)$ පවතී නම් එවිට f ට $x = c$ හි දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ඇත. $f(c)$ යනු f හි ස්ථාවර අගයයි.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	4. ශ්‍රිතයක ස්ථානීය උපරිම / අවම අර්ථ දක්වයි.	f ශ්‍රිතය f හි ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් වන $x = a$ අතරේ දී අර්ථ දක්වා ඇත. (i) සියලු $x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ සඳහා $f(x) < f(a)$ වන සේ $\delta > 0$ පවති නම් එවිට $x = a$ හි දී f ට ස්ථානිය උපරිමයක් ඇත. (ii) සියලු $x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ සඳහා $f(x) > f(a)$ වන සේ $\delta > 0$ පවති නම් එවිට $x = a$ හි දී f ට ස්ථානිය අවමයක් ඇත.	
	5. ව්‍යුත්පන්න භාවිතයෙන් ශ්‍රිතයක ස්ථානීය උපරිම / අවම අගය පැහැදිලි කරයි.	a හි අසරෙක දී අවකල්‍ය f අගය සලකමු. 1. (i) $f'(a) = 0$ (ii) සියලු $x \in (a-\delta, a)$ සඳහා $f(x) > 0$ සහ (iii) සියලු $x \in (a, a+\delta)$ සඳහා $f'(x < 0)$ නම් එවිට $x = a$ හි දී f ට ස්ථානිය උපරිමයක් ඇතැයි ප්‍රකාශ කරන්න. 2. (i) $f'(a) = 0$ (ii) සියලු $x \in (a-\delta, a)$ සඳහා $f'(x) < 0$ සහ (iii) සියලු $x \in (a, a+\delta)$ සඳහා $f(x) > 0$ නම් එවිට $x = a$ හි දී f ට ස්ථානිය අවමයක් ඇතැයි ප්‍රකාශ කරන්න.	
	6. ශ්‍රිතයක නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය අර්ථ දක්වයි.	$x = a$ අසරෙක දී අවකලන f ශ්‍රිතය සලකමු. (i) $f'(a) = 0$ සලකමු.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		⇓ සියලු $x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ සඳහා $f'(x) > 0$ වන සේ $\delta > 0$ පවතී නම් හෝ සියලු $x \in (a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ සඳහා $f'(x) < 0$ වන සේ $\delta > 0$ පවතී නම් $x = a$ දී f ට නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් ඇතැයි ප්‍රකාශ කරන්න.	
	7. ස්ථානීය උපරිම / අවම සෙවීම සඳහා දෙවැනි අවකලන පරීක්ෂාව භාවිත කරයි.	⇓ $f'(a)=0$ හා $f''(a)>0$ නම් f ශ්‍රිතයට $x=a$ හි දී ස්ථානීය අවමයක් ඇතැයි කියනු ලැබේ. ⇑ $f'(a)=0$ සහ $f''(a) < 0$ නම් f ශ්‍රිතයට $x=a$ හි දී ස්ථානීය උපරිමයක් අතැයි කියනු ලැබේ.	
	8. එදිනෙදා ගැටලු විසඳීම සඳහා ව්‍යුත්පන්න භාවිත කරයි.	එදිනෙදා ක්‍රියාකාරකම්වල දී හමුවන ස්ථානීය උපරිම හා ස්ථානීය අවම අඩංගු ගැටලු විසඳන ක්‍රම සාකච්ඡා කරන්න.	
13.7	ශ්‍රිතවල වක්‍ර අනුරේඛනය කරයි.	ඉහත මූල ධර්ම භාවිතයෙන් ශ්‍රිතවල වක්‍ර අනුරේඛනය කිරීමට සිසුන් යොමු කරන්න. තිරස් හා සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ අඩංගු නිදසුන් ද සාකච්ඡා කරන්න.	08
13.8	1. අනුකලනය අවකලනයේ ප්‍රතිලෝම ක්‍රියාවලියක් ලෙස අර්ථ දක්වයි.	දෙන ලද $f(x)$ ශ්‍රිතයක් සඳහා $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ වන සේ වූ F(x) පවතී නම් $F(x) = \int f(x)dx$ වේ. $F(x)$ ට $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය ලෙස කියනු ලබන බව පවසන්න.	02
	2. අභිමත නියතය විස්තර කරයි.	$\frac{d}{dx}\{F(x)+C\} = f(x)$ වන විට $\int f(x)dx = F(x)+C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි. ශ්‍රිතයක අනුකලනය අනන්‍ය නොවන නමුත් නියතයකින් වෙනස් විය හැකි බව සාකච්ඡා කරන්න. එම නියතය අභිමත නියතය යැයි කියනු ලබන බව පවසන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		ඉහත ආකාරය අනිශ්චිත අනුකලනය ලෙස හැඳින්වෙන බව පවසන්න. **සටහන:** ගැටලු විසඳීමේ දී සිසුන් C ලියා දැක්වීමේ දී එය කුමක්දැයි සඳහන් කළ යුතු බව පවසන්න. එනම් C යනු අභිමත නියතය හෝ අනුකල නියතය බව සඳහන් කළ යුතු බව පවසන්න.	
	3. අනුකලනය පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරයි.	පහත සඳහන් ප්‍රමේයය පැහැදිලි කරන්න. (i) $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (ii) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ මෙහි $f(x)$ හා $g(x)$ යනු x හි ශ්‍රිත වන අතර λ යනු නියතයකි.	
13.9	1. සම්මත ශ්‍රිතවල අනිශ්චිත අනුකල හඳුන්වයි.	පහත සඳහන් ඒවා ප්‍රකාශ කරන්න. 1. (a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ (b) $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C \quad (x \neq 0)$ (c) $\int e^x dx = e^x + C$ 2. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ 3. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ 4. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ 5. $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$ 6. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$ 7. $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$ $f(x)$ හි ප්‍රතිව්‍යුත්පන්නය $g(x)$ යයි ගනිමු. එවිට $\frac{d}{dx} g(x) = f(x)$. $p \neq 0$ වූ $px+q$ යන්න $g(x)$ හි x සඳහා ආදේශ කර x විෂයයෙන් අවකලනය කළ විට $\frac{d}{dx}\frac{1}{p} g(px+q) = \frac{d}{d(px+q)} g(px+q)$ $= f(px+q)$	07

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		$\Rightarrow \int f(px+q)dx = \frac{1}{p}g(px+q)+C$ බව ප්‍රකාශ කරන්න.	
	2. ලවය, හරයේ අවකලනය ලෙස ඇති පරිමේය ශ්‍රිත අනුකලනය කරයි.	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$ මෙහි $f'(x)$ යනු $f(x)$ හි ප්‍රතිව්‍යුත්පනය බව ප්‍රකාශ කරන්න.	
	3. භින්න භාග භාවිත කර පරිමේය ශ්‍රිත අනුකලනය කරයි.	$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$; මෙහි $Q(x)$ යනු සාධක වෙන් කළ හැකි මාත්‍රය ≤ 4 වූ බහු පදයකි.	
	4. ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත අනුකලනය කරයි.	ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත හා සම්මත අනුකල භාවිතයෙන් පහත අනුකල අනුකලනය කරන්න. $\int \tan x dx,\ \int \cot x dx,\ \int \sec x dx.$ $\int \operatorname{cosec} x dx,\ \int \sin^2 x dx,\ \int \cos^2 x dx.$ $\int \sin mx \cos nx\, dx, \int \cos mx \cos nx\, dx$ $\int \sin mx \sin nx\, dx$	
13.10	කලනය පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයය භාවිත කර නිශ්චිත අනුකල නිර්ණය කරයි.	$\int_a^b f(x)dx = [\phi(x)]_a^b = \phi(b) - \phi(a)$ (මෙහි $\phi(x)$ යනු $f(x)$ හි අනුකලය වේ) ලෙස අර්ථ දක්වන්න. සියලු සම්මත අනුකල ඇතුළත් ආදර්ශ ප්‍රශ්න ඇගයීමට මෙම ප්‍රමේයය භාවිත කරන්න. පහත සඳහන් ප්‍රමේයන් සාකච්ඡා කරන්න. (i) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$ (ii) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ (iii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (iv) $f(x)$ ශ්‍රිතය (a,c) සහ (c,b) අනුකලය නම් පමණක් $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	06

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
13.11	අනුකලනය කිරීමට විවිධ ක්‍රම භාවිත කරයි.	$\int f'(x)\{f(x)\}^r dx = \mathrm{I}$ $t = f(x)$ ලෙස ගන්න. එවිට $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ $\mathrm{I} = \int t^r dt$ $= \begin{cases} \frac{1}{r+1}t^{r+1} & ; r \neq -1 \text{ විට} \\ \mathrm{n}\lvert t \rvert & ; r = -1 \text{ විට} \end{cases}$ බව සාකච්ඡා කරන්න. මෙහි $t = f(x)$. පහත සඳහන් අනුකල අගයන් ය. (i) $\int \sin^m x\, dx$ (ii) $\int \cos^m x\, dx$ (iii) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ මෙහි m, n ධන නිඛිල වේ. (iv) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	06

13 ශ්‍රේණිය - පළමුවැනි වාරය - ගණිතය II

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
5.1	1. සසම්භාවී පරීක්ෂණ පැහැදිලි කරයි.	**සම්භාවිතාව** සසම්භාවී පරීක්ෂණ යනු කුමක්දැයි සාකච්ඡා කරන්න. සසම්භාවී පරීක්ෂණ සඳහා නිදසුන් ඉදිරිපත් කරන්න.	05
	2. නියැදි අවකාශය අර්ථ දක්වයි.	සසම්භාවී පරීක්ෂණයක විය හැකි සියලු ම ප්‍රතිඵල අඩංගු කුලකය එම පරීක්ෂණය සඳහා නියැදි අවකාශය බව පවසන්න.	
	3. සිද්ධියක් අර්ථ දක්වයි.	සිද්ධියක් යනු නියැදි අවකාශයේ උපකුලකයකි. (නියම හෝ එසේ නොවන) එනම් සිද්ධියක් යනු නියැදි අවකාශයේ ප්‍රතිඵල එකක් හෝ ඊට වැඩි ගණනක එකතුවක් බව පවසන්න.	
	4. සිද්ධි අවකාශය පැහැදිලි කරයි.	සසම්භාවී පරීක්ෂණයක සියලු ම සිද්ධිවලින් සැදුනු කුලකය සිද්ධි අවකාශය ලෙස කියනු ලබන බව පවසන්න. **සටහන:** අභිශූන්‍ය කුලකය ද නියැදි අවකාශය ද සිද්ධි අවකාශයේ අවයව බව පවසන්න.	
	5. සරල සිද්ධි හා සංයුක්ත සිද්ධි පැහැදිලි කරයි.	සසම්භාවී පරීක්ෂණයක එකම එක ප්‍රතිඵලයක් පමණක් අඩංගු වන සිද්ධියක් සරල සිද්ධියක් ලෙස හඳුන්වනු ලබන බව පවසන්න. සසම්භාවී පරීක්ෂණයක එකකට වැඩි ප්‍රතිඵල ගණනක් අඩංගු සිද්ධියක් සංයුක්ත සිද්ධියක් බව පවසන්න. (i) සිද්ධි දෙකක මේලය (ii) සිද්ධි දෙකක ඡේදනය (iii) අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි (iv) නිරවශේෂ සිද්ධි (v) සිද්ධියක අනුපූරක සිද්ධිය යන ඒවා පැහැදිලි කරන්න.	
5.2	1. සම්භාවිතාව පිළිබඳ පෞරාණික අර්ථ දැක්වීම ප්‍රකාශ කරයි.	සමසේ සිදුවිය හැකි N පරිමිත සිද්ධි ගණනකින් සමන්විත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් සමග සංඝටිත A සිද්ධියක සම්භාවිතාව $P(A)=\frac{n(A)}{N}$ ලෙස අර්ථ දක්වන බව පවසන්න. මෙහි $n(A)$ යනු A සිද්ධියට අයත් සරල සිද්ධි (ප්‍රතිඵල) ගණන වේ.	10

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		සටහන: (i) සසම්භාවී පරීක්ෂණයක ප්‍රතිඵල සමසේ සිදු වන සිද්ධි නොවන විට ඉහත සූත්‍රය භාවිත කළ නොහැකි බව ද (ii) නියැදි අවකාශය අපරිමිත වන විට ඉහත සූත්‍රය වලංගු නොවන බව ද පවසන්න. ගැටලුවලට සිසුන් යොමු කරන්න.	
	2. සම්භාවිතාව පිළිබඳ පරීක්ෂණාත්මක අර්ථ දැක්වීම ප්‍රකාශ කරයි.	සසම්භාවී පරීක්ෂණයෙන් N වාරයක් පුනරාවර්තනය කිරීමේ දී A නම් සිද්ධියක් N_A වාරයක් සිදුවේ නම් $\frac{N_A}{N}$ යන භාගය N අනන්තය කරා ළඟා වීමේ දී සීමාන්තික අගයකට එළඹේ. එම සීමාන්තික අගය A සිද්ධියේ සම්භාවිතාව ලෙස ගණනය කරන බව පවසන්න. එනම් $P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$ මෙම අර්ථ දැක්වීම, සම්භාවිතාව පිළිබඳ සාපේක්ෂ සංඛ්‍යානමය අර්ථ දැක්වීම ලෙස ද නම් කරන බව පවසන්න. ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
	3. සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රත්‍යක්ෂම අර්ථ දැක්වීම ප්‍රකාශ කරයි.	Ω නියැදි අවකාශය සහිත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක සිද්ධි අවකාශය ε මගින් දක්වන්න. $P : \varepsilon \to [0,1]$ ලෙස අර්ථ දක්වන P ශ්‍රිතයන් පහත දැක්වෙන ප්‍රත්‍යක්ෂය තෘප්ත කරයි නම් එම P ශ්‍රිතය, සම්භාවිතා ශ්‍රිතය ලෙස කියනු ලබන බව පවසන්න. (i) ඕනෑම $A \in \varepsilon$ සඳහා $P(A) \geq 0$ (ii) $P(\Omega) = 1$ (iii) A_1 හා A_2 යන ε හි වූ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි නම් එවිට $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	4. ප්‍රත්‍යක්ෂම අර්ථ දැක්වීම භාවිත කර සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රමේයය සාධනය කරන අතර එම ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් සම්භාවිතාව පිළිබඳ ගැටලු විසඳයි.	පහත සඳහන් ප්‍රමේයය සාධනය කරන්න. (i) $P(\phi) = 0$ (ii) $P(A') = 1 - P(A)$ (iii) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$ (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (v) $A \subseteq B$ නම් එවිට $P(A) \leq P(B)$ මෙහි A, B යනු සසම්භාවී පරීක්ෂණයක සිද්ධි වන අතර පිළිවෙළින් A', B' යනු එම සිද්ධිවල අනුපූරක සිද්ධි වේ. **සටහන:** (v) ප්‍රමේයයේ විලෝමය සත්‍ය නොවන බව පවසන්න. ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
5.3	1. අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව අර්ථ දක්වයි.	Ω යනු සසම්භාවී පරීක්ෂණයක නියැදි අවකාශය යැයි ගනිමු. A සහ B යනු එම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ වන $P(A) > 0$ පරිදි වූ සිද්ධි දෙකකි. A දී ඇති විට B සිදු වීමේ අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව $P(B/A)$ මගින් දක්වන බව ද $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ලෙස අර්ථ දක්වන බව ද පවසන්න.	07
	2. අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රමේයය සාධනය කරයි.	පහත සඳහන් ප්‍රමේයය සාධනය කරන්න. (i) $P(A) > 0$ නම් එවිට $P(\phi / A) = 0$ (ii) $A, B \in \varepsilon$ සහ $P(A) > 0$ නම් එවිට $P(B'/A) = 1 - P(B/A)$ (iii) $A, B_1, B_2 \in \varepsilon$ හා $P(A) > 0$ නම් එවිට $P(B_1 \mid A) = P(B_1 \cap B_2/A) + P(B_1 \cap B_2'/A)$ සහ $P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A) - P[B_1 \cap B_2/A]$ මෙහි ε යනු සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ සිද්ධි අවකාශයයි. ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	3. සම්භාවිතාව පිළිබඳ ගුණන නීතිය ප්‍රකාශ කරයි.	A_1, A_2 යනු සසම්භාවී පරීක්ෂණයක ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් ද $P(A_1) > 0$ යැයි ගනිමු. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$ බව ද A_1, A_2, A_3 සිද්ධි තුනක් සඳහා ගුණන නීතිය $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ $= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cap A_2)$ බව ද පවසන්න. මෙහි $P(A_2) > 0$ විය යුතු බව පවසන්න. ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
5.4	1. ස්වායත්ත සිද්ධි අර්ථ දක්වයි.	A_1, A_2 සහ ε සිද්ධි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ නම් හා නම්ම පමණක් A_1 හා A_2 සිද්ධි ස්වායත්ත බව ප්‍රකාශ කරන්න.	07
	2. ස්වායත්ත සිද්ධි පිළිබඳ ප්‍රමේය සාධනය කරන අතර ගැටලු විසඳීමට ඒවා යොදයි.	A සහ B යනු ස්වායත්ත සිද්ධි නම් (i) A සහ B' (ii) A' සහ B (iii) A' සහ B' සිද්ධි ස්වායත්ත වන බව පවසන්න.	
	3. සිද්ධි තුනක් සඳහා ස්වායත්තාව පැහැදිලි කරයි.	A, B, C යනු Ω නියැදි අවකාශය සහිත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක සිද්ධි අවකාශයේ සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ නම් එවිට A, B, C සිද්ධි එකිනෙකට ස්වායත්ත බව ප්‍රකාශ කරන්න. A, B, C එකිනෙකට ස්වායත්ත නම් $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ $P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$ $P(C \cap A) = P(C)\,P(A)$ තව ද, විලෝම වශයෙන් $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ $P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$ $P(C \cap A) = P(C)\,P(A)$	

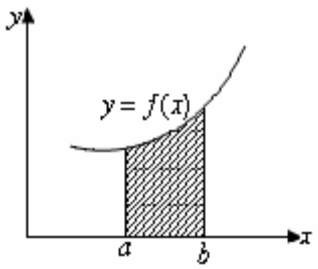
නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		නම් A, B, C යුගල වශයෙන් ස්වායත්ත යැයි කියනු ලැබේ.	
5.5	1. නියැදි අවකාශයක විභාගනය අර්ථ දක්වයි.	Ω නියැදි අවකාශය සහිත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක ε සිද්ධි අවකාශයේ වූ සිද්ධි අනුක්‍රමයන් $\{B_1, B_2, B_3, \ldots B_n\}$ යැයි ගනිමු. Φ $B_i \cap B_j = \phi$, සියලු $i \neq j$ සඳහා සහ Φ $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ නම් එවිට $\{B_1, B_2, B_3, \ldots B_n\}$ යනු Ω නියැදි අවකාශයේ විභාගනයක් යැයි කියනු ලබන බව පවසන්න.	06
	2. මුලු සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන අතර ගැටලු විසඳීමට එය යොදයි	$\{B_1, B_2, B_3, \ldots B_n\}$ යනු ε සිද්ධි අවකාශය සහිත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක Ω නියැදි අවකාශයේ විභාගනයන් යැයි ගනිමු. $P(B_i) > 0$ සහ A යනු නියැදි අවකාශයේ ඕනෑම සිද්ධියක් නම් එවිට $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\, P(B_i)$ ලෙස මුලු සම්භාවිතාව පිළිබඳ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවන්න.	
	3. බේයස්ගේ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන අතර ගැටලු විසඳීමට එය යොදයි. .	Ω නියැදි අවකාශයක් සහිත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක ε සිද්ධි අවකාශයේ වූ සිද්ධි අනුක්‍රමයක් $\{B_1, B_2, B_3, \ldots B_n\}$ යැයි ගනිමු. A යනු ε සිද්ධි අවකාශයේ ඕනෑම සිද්ධියක් ද $P(A) > 0$ ද නම්, එවිට $P(B_j / A) = \dfrac{P(A/B_j).P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) P(B_i)}$ $j = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා ලෙස බේයස් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	

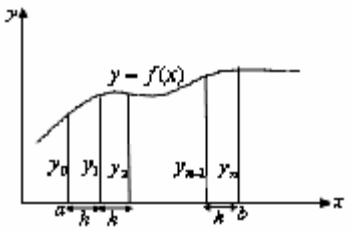
දෙවැනි වාරය

13 ශ්‍රේණිය - දෙවැනි වාරය - ගණිතය I

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
6.0	1. පැස්කල් ත්‍රිකෝණය විස්තර කරයි.	ද්විපද ප්‍රසාරණය 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 හැර සෑම පේළියක ම යම් සංඛ්‍යාවක්, ඊට ඉහළ පේළියේ එකී සංඛ්‍යාවකට දෙපසින් පිහිටි සංඛ්‍යා දෙකේ ඓක්‍යයට සමාන වන පරිදි වූ ඉහත සංඛ්‍යා පෙළ ගැස්වීමට පැස්කල් ත්‍රිකෝණය යැයි කියනු ලැබේ. අවශ්‍ය තරම් දුරට, ඉහත පැස්කල් ත්‍රිකෝණය විස්තීර්ණ කළ හැකි ය. $(1+x)^1 = 1+x$ $= {}^1C_0 + {}^1C_1 x$ $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$ $= {}^2C_0 + {}^2C_1 x + {}^2C_2 x^2$ $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$ $= {}^3C_0 + {}^3C_1 x + {}^3C_2 x^2 + {}^3C_3 x^3$ බව පැහැදිලි කරන්න. $(1+x)^4$ සහ $(1+x)^5$ සාකච්ඡා කරන්න.	12
	2. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරයි.	ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කිරීම. $(a+x)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x$ $+ {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \ldots {}^nC_r a^{n-r} x^r + \ldots + {}^nC_n x^n$ $= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r a^{n-r} x^r$ මෙහි ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ $(0 \le r \le n)$ ⇓ ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_r, \ldots, {}^nC_n$ යන ඒවාට ද්විපද සංගුණක යැයි ද,	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		(ii) ${}^nC_0a^n, {}^nC_1a^{n-1}, \ldots {}^nC_ra^{n-r}, \ldots, {}^nC_n$ යන ඒවාට ප්‍රසාරණයේ සංගුණක යැයි ද, කියනු ලැබේ. (iii) ප්‍රසාරණයේ පද ගණන $(n+1)$ කි. (iv) සාධාරණ පදය T_{r+1} යන්න $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}x^r$ මගින් දෙනු ලැබෙයි. ඉහත ප්‍රසාරණය, x හි ආරෝහණ බලවලින් දක්වා ඇති බව සලකන්න.	
	3. ගැටලු විසඳීම සඳහා ද්විපද ප්‍රමේයය භාවිත කරයි.	$(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න. ද්විපද ප්‍රමේයයේ සරල භාවිත සඳහා සිසුන් යොමු කරන්න.	
4.2	1. තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක මාපාංකය (නිරපේක්ෂ අගය) ප්‍රකාශ කරයි.	**අසමානතා** $x \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\lvert x \rvert = x,\ x \geq 0$ නම් $= -x,\quad x < 0$ නම් ලෙස $\lvert x \rvert$ අර්ථ දක්වන්න.	08
	2. මාපාංක ශ්‍රිතය අර්ථ දක්වයි.	f යනු $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ වන පරිදි වූ ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු. එවිට, $\lvert f \rvert$ යන්න, පහත දැක්වෙන පරිදි අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $\lvert f \rvert : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\lvert f \rvert(x) = \lvert f(x) \rvert$ එනම්, $\lvert f \rvert(x) = f(x),\ f(x) \geq 0$ නම්, $= -f(x),\ f(x) < 0$ නම්	
	3. මාපාංක ඇතුළත් ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර අඳියි.	උදාහරණ මගින් පැහැදිලි කරන්න. $y = \lvert ax \rvert,\ y = \lvert ax \rvert + b,$ $y = \lvert ax+b \rvert + c$ $y = c - \lvert ax+b \rvert$ $y = \lvert ax+b \rvert \pm (cx+d)$ $y = \lvert ax^2+bx+c \rvert$ වැනි ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාර ඉදිරිපත් කරන්න. මෙහි a, b, c, d යනු තාත්ත්වික නියත වේ.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	4. මාපාංක ඇතුළත් අසමානතා විසඳයි.	පහත දැක්වෙන ආකාරයේ අසමානතාවල විසඳුම් කුලක (i) වීජීයව (ii) ප්‍රස්තාරිකව නිර්ණය කිරීම. $\lvert ax+b\rvert \gtrless \lvert cx+d\rvert$ $\lvert ax+b\rvert \gtrless cx+d$ $\lvert x+a\rvert + \lvert x+b\rvert \gtrless \lvert x+c\rvert$	
13.12	කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් අනුකලනය කරයි.	**කලනය** $u(x)$ හා $v(x)$ යනු අවකල්‍ය ශ්‍රිත යැයි ගෙන, $\int u\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = uv - \int v\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ බව පෙන්වන්න. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිත වන ගැටලු සාකච්ඡා කරන්න.	06
13.13	⇓ වක්‍රයක යට වර්ගඵලය සොයයි.	නිශ්චිත අනුකලයක් ලෙස වක්‍රයක් යට වර්ගඵලය අර්ථ දක්වයි. $y = f(x)$ යනු සියලු $x \in (a,b)$ සඳහා ම $f(x) \geq 0$ වන පරිදි වූ සන්තතික ශ්‍රිතයක් යැයි ගනිමු.  $y = f(x)$ වක්‍රයෙන් ද, x අක්ෂයෙන් ද $x = a$ හා $x = b$ රේඛාවලින් ද ඇවිරුණු වර්ගඵලය $\int_a^b f(x)\,dx$ මගින් දෙනු ලැබෙයි. මෙය $x = a$ සිට $x = b$ දක්වා $y = f(x)$ වක්‍රය යට වර්ගඵලය $\int_a^b f(x)\,dx$ යනුවෙන් ද දක්වනු ලැබේ.	04

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		සාධාරණ වශයෙන්, $[a,b]$ ප්‍රාන්තරයේ $y=f(x)$ වක්‍රයෙන් සහ x අක්ෂයෙන් මායිම් වූ වර්ගඵලය $\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$ වේ.	
	2. වක්‍ර දෙකක් අතර වර්ගඵලය සොයයි.	$y=f(x)$ හා $y=g(x)$ යනු $[a,b]$ ප්‍රාන්තරයේ දී $f(x)\geq g(x)$ වන පරිදි වූ වක්‍ර දෙකක් යැයි ගනිමු. වක්‍ර දෙකෙන් ද, $x=a$ සහ $x=b$ රේඛාවලින් ද ඇවිරුණු වර්ගඵලය $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\, dx$ මගින් දෙනු ලැබේ. සාධාරණ වශයෙන්, මෙම වර්ගඵලය $\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx$ වේ.	
13.14	ගැටලු විසඳීම සඳහා සන්නිකර්ෂණ ක්‍රම භාවිත කරයි.	නිශ්චිත අනුකල ඇගයීම සඳහා වූ පහත සඳහන් සන්නිකර්ෂණ ක්‍රම සාකච්ඡා කරන්න. (1) ත්‍රපීසාභ නීතිය  $\int_a^b f(x)\,dx$ මගින් නිරූපණය වන වර්ගඵලය සමාන h පළලැති, y අක්ෂයට සමාන්තර තීරු බෙදා ඇතැයි ගනිමු. එවිට, $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}h(y_0+y_1) + \frac{1}{2}h(y_1+y_2)$ $.....+\frac{1}{2}h(y_{n-1}+y_n)$ $= \frac{h}{2}(y_0+y_n)$ $+2(y_1+y_2+...y_{n-1})$	04

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		මෙහි $h = \frac{b-a}{n}$ (2) සිම්සන් නීතිය $\int_a^b f(x)\,dx$ මගින් නිරූපණය වන වර්ගඵලය, එක එකෙහි පළල h වන තීරු $2n$ ගණනකට $(n \in \mathbb{Z}^+)$ බෙදා ඇති විට, $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right]$ වේ. සිම්සන් නීතිය සඳහා තීරු ගණන ඉරට්ට විය යුතු බව (හෝ කෝටික ගණන ඔත්තේ විය යුතු බව) සලකන්න.	
7.1	1. අනුක්‍රම අර්ථ දක්වයි.	**ශ්‍රේණි** අනුක්‍රමයක් යනු විශේෂිත පටිපාටියකට සංඛ්‍යාත්මක පද ලබා දෙන නීතියක් සහිත පද කුලකයක් ලෙස අර්ථ දැක්වීම. a_n යනු අනුක්‍රමයක n වැනි පදය නම්, අනුක්‍රමය $\{a_n\}$ ලෙස දක්වනු ලැබේ. $\lim_{n\to\infty} a_n$ පවතියි නම් (පරිමිත සංඛ්‍යාවක් නම්) $\{a_n\}$ අනුක්‍රමය අභිසාරී යැයි කියනු ලැබේ.	05
7.4	1. අපරිමිත ශ්‍රේණියක ඓක්‍යය විවරණය කරයි.	⇓ පහත සඳහන් සීමා සාකච්ඡා කරන්න. • $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ • $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ • $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right),\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r^n}\right)$ • $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+b}{c_n+d}\right)$	05

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		• $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an+b}{pn^2+qn+r}\right)$ • $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+bn+c}{pn+q}\right)$ ⇒ අනුක්‍රමයක සීමාව සාකච්ඡා කරන්න.	
	2. ශ්‍රේණි අර්ථ දක්වයි.	**අනුක්‍රම හා ශ්‍රේණි අතර සම්බන්ධය** අනුක්‍රමයක පද ඓක්‍යයක් ලෙස ප්‍රකාශ කළ විට එයට ශ්‍රේණියක් යැයි කියනු ලැබේ. උදා: $S_n=\sum_{r=1}^{n}a_r$	
	3. ශ්‍රේණි ආකලනය පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරයි.	ශ්‍රේණියක සාධාරණ පදය (r වැනි පදය) u_r ලෙස ද, n පදවල ඓක්‍යය $\sum_{r=1}^{n}u_r$ ලෙස ද ප්‍රකාශ කරන්න. ⇒ $\sum_{r=1}^{n}(u_r\pm v_r) = \sum_{r=1}^{n}u_r\pm\sum_{r=1}^{n}v_r$ ⇒ $\sum_{r=1}^{n}ku_r = k\sum_{r=1}^{n}u_r$ මෙහි k යනු නියතයකි. සාධාරණ වශයෙන්, $\sum_{r=1}^{n}u_rv_r \neq \left(\sum_{r=1}^{n}u_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n}v_r\right)$	
	4. සමාන්තර ශ්‍රේණියක ඓක්‍යය සොයයි.	**සමාන්තර ශ්‍රේණිය අර්ථ දැක්වීම.** ශ්‍රේණියක සෑම අනුයාත පද යුගලයක ම පසු පදයත්, පෙර පදයත් අතර වෙනස නියත නම් එයට සමාන්තර ශ්‍රේණියක් යැයි කියනු ලැබේ. ⇒ සාධාරණ පදය T_r යන්න, $T_r=a+(r-1)d$ ලෙස වන බව ද, ⇒ මුල් පද හි ඓක්‍යය $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$ $= \frac{n}{2}(a+l)$ බව ද පෙන්වන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		මෙහි a යනු පළමු පදය ද, d යනු පොදු අන්තරය ද l යනු අවසාන (n වැනි) පදය ද වේ. ඉහත සූත්‍රවල භාවිතය.	
	5. ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක ඓක්‍යය සොයයි.	**ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිය අර්ථ දැක්වීම.** ශ්‍රේණියක සෑම අනුයාත පද යුගලයක ම පසු පදයත්, පෙර පදයත් අතර අනුපාතය නියත නම් එයට ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් යැයි කියනු ලැබේ. (i) සාධාරණ පදය $T_k = ar^{k-1}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි යනු පළමු පදය ද r යනු පොදු අනුපාතය ද වේ. (ii) පද n හි ඓක්‍යය $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$; $(r \neq 1)$ විට $= na$; $r=1$ බව ද පෙන්වන්න. ඉහත සූත්‍රවල භාවිතය.	
7.2	ශ්‍රේණියක ඓක්‍යය සොයයි.	1. $\sum_{r=1}^{n} r$, $\sum_{r=1}^{n} r^2$ සහ $\sum_{r=1}^{n} r^3$ නිර්ණය කිරීම. ශ්‍රේණි ආකලනය සඳහා ඉහත ප්‍රතිඵල සහ ශ්‍රේණි ආකලනය පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයය භාවිත කිරීම. 2. (i) අන්තර ක්‍රමය (ii) භින්න භාග භාවිතයෙන් ශ්‍රේණි ආකලනය	08
7.3	ගණිතමය අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිත කරයි.	ගණිතමය අභ්‍යුහන සාධනය විස්තර කරන්න. (i) $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (ii) $\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{u}{3}(n+1)(n+2)$ (iii) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$	05

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		(iv) $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1}$ වැනි ප්‍රතිඵල සාධනය සඳහා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිත කරන්න.	
7.4	1. ශ්‍රේණියක අනන්තයට ඓක්‍යය විශ්ලේෂණය කරයි.	$\sum u_r$ යනු ශ්‍රේණියක් ද $S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ ද යැයි ගනිමු. $\lim_{n\to\infty} S_n = l$ (පරිමිත) නම්, එවිට $\sum u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී යැයි ද, එහි අනන්තයට ඓක්‍යය l යැයි ද කියනු ලැබේ. එනම්, $\sum_{r=1}^{\infty} u_r = l$ S_n පරිමිත සීමාවකට නොඑළඹෙයි නම්, එවිට $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ අපසාරී යැයි කියනු ලැබේ. පොදු අනුපාතය r වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් $\lvert r \rvert < 1$ නම් අභිසාරී වන අතර, එහි අනන්තයට ඓක්‍යය $\frac{a}{1-r}$ වේ.	
	2. අන්තර සමීකරණ පැහැදිලි කරයි.	$n \geq 1$ සඳහා n වන පදය $x_n = f(n)$ වූ ද ආරම්භක අවස්ථාව / අවස්ථා දන්නා වූ ද $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ අනුක්‍රමයක අන්තර සමීකරණය හඳුනා ගෙන ප්‍රකාශ කරයි. **නිදසුන 1:** t වර්ෂයකට පසු ජනගහන විශේෂය x_t නම්, වාර්ෂික ව ජනගහනය වැඩි වීමේ සීඝ්‍රතාව ආරම්භක ජනගහනයෙන් 2% යැයි ද එහි ආරම්භක ජනගහනය x_0 යැයි ද ගන්න. එවිට, අන්තර සමීකරණය $x_{t+1} = x_t + \frac{2}{100} x_t$ වන බව ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි x_0 දන්නා අගයකි.	05

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		නිදසුන 2: සෑම අවුරුදු 25 ක දී රේඩියම් ක්ෂයය වීමේ සීඝ්‍රතාව 1% ක් ය. අවුරුදු 25 කට පසු ඇති රේඩියම් ප්‍රමාණය x_n ලෙස ගන්න. එවිට, අන්තර සමීකරණ $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{100}x_n$ වන බව ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි x_0 දන්නා අගයකි. **නිදසුන 3:** වැල් පොලිය මුල් ආයෝජන ප්‍රමාණය p ද වාර්ෂික පොලී අනුපාතිකය r ද වර්ෂ t කාලයකට පසු ආයෝජන ප්‍රමාණය x ද ගන්න. එවිට, අන්තර සමීකරණය $x_{t+1} = x_t + rx_t$ සහ $x_0 = p$ බව ප්‍රකාශ කරන්න. අන්තර සමීකරණ භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
	3. අන්තර සමීකරණ විග්‍රහ කරයි.	$x_{n+1} = ax_n + b$ මෙහි a, b තාත්ත්වික නියත ද $a \neq 0$ ආකාරයේ අන්තර සමීකරණයක් පළමු ගණයේ ඒකජ සමීකරණයක් ලෙස හඳුන්වා දෙන්න. $b = 0$ නම් එය සජාතීය අන්තර සමීකරණයක් ලෙස හඳුන්වා දෙන්න.	
	4. අන්තර සමීකරණයක විසඳුම් ලබා ගනියි.	$x_n = ax_{n-1} + b$ හි විසඳුම $x_n = ax_{n-1} + b$ $= a[ax_{n-2} + b] + b$ $= a^2 x_{n-2} + b(1+a)$ $\therefore x_n = a^2[ax_{n-3} + b] + b(1+a)$ මෙම ක්‍රමවේදය අනුගමනය කිරීමෙන්, $x_n = a^n x_0 + b(1 + a + \ldots + a^{n-1})$ ලැබෙන බව පැහැදිලි කරන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		දැන් පහත අවස්ථා දෙක සලකන්න. $a = 1$ නම් $x_n = x_0 + nb$ නැතහොත් $x_n = a^n x_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b$ සජාතීය සමීකරණ සඳහා විසඳුම $x_n = x_0$ බව ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $a = 1$	

13 ශ්‍රේණිය - දෙවැනි වාරය - ගණිතය II

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
5.6	1. සසම්භාවී විචල්‍ය පැහැදිලි කරයි.	සංඛ්‍යානය සසම්භාවී පරීක්ෂණයක නියැදි අවකාශය Ω යයි ගනිමු. නියැදි අවකාශය Ω සිට තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය අර්ථ දක්වා ඇති ශ්‍රිතයකට සසම්භාවී විචල්‍යයක් යයි කියනු ලැබේ. ඒවා X, Y, Z ලෙස අංකනය කරනු ලැබේ. $X:\Omega \to \mathbb{R}$ යනු ශ්‍රිතයකි. $X(\omega)=x;\ \ \omega\in\Omega,\ \ x\in\mathbb{R}$	02
	2. විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍ය අර්ථ දක්වයි.	X යනු සසම්භාවී විචල්‍යයක් ලෙස සලකමු. එනම් $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ශ්‍රිතයකි. X ට ලබා ගත හැකි අගය කුලකය (x හි පරාසය) පරිමිත හෝ ගිණිය හැකි පරිමිතයක් නම් එයට විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක් යයි කියනු ලැබේ.	
	3. සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍ය අර්ථ දක්වයි.	X යනු සසම්භාවී විචල්‍යයක් ලෙස සලකමු. එනම් $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ශ්‍රිතයකි. X ට ලබා ගත හැකි අගය කුලකය ගිණිය නොහැකි අපරිමිතයක් වේ නම් එයට සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක් යයි කියනු ලැබේ.	
5.7	1. විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය අර්ථ දක්වයි.	සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් හා සම්බන්ධ නියැදි අවකාශය Ω යැයි ද X යනු Ω මත අර්ථ දක්වා ඇති සසම්භාවී විචල්‍යයක් යැයි ගනිමු. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ X හි අගය කුලකය $\{x_1, x_2, x_3 \ldots x_n\}$ යයි ගනිමු. $\{x_1, x_2, x_3 \ldots x_n\}$ කුලකය මත p ශ්‍රිතය පහත පරිදි අර්ථ දක්වමු. $X=x$ වීමේ සම්භාවිතාව $P(X=x)$ නම් $P(x_i)=P(X=x);\ \ x=x_i,\ i=1,2,\ldots n$ $=0$; අනෙක් විට එවිට $P(x)$ ට, x විචල්‍යයේ සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය යැයි කියනු ලැබේ. සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය $\{(x_i P(x_i)) : i=1,2,\ldots n\}$ වන ආකාරයේ පටිපාටිගත යුගල කුලකයක් ලෙස ලිවිය හැකි ය.	06

<table>
<tr><th>නිපුණතා මට්ටම</th><th>ඉගෙනුම් ඵල</th><th>විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්</th><th>කාලච්ඡේද ගණන</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
එය X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය වගුවක ආකාරයට
<table>
<tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>...</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td>$p(x_i)$</td><td>$p(x_1)$</td><td>$p(x_2)$</td><td>$p(x_3)$</td><td>...</td><td>$p(x_n)$</td></tr>
</table>
$P(x_i)$ සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතයේ ලක්ෂණ
(i) $p(x_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$
(ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2. සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය අර්ථ දක්වයි.</td><td>
සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතයේ $(f(x))$ හි ලක්ෂණ
(i) සියලු x සඳහා $[f(x)] \geq 0$
(ii) $\int_{-\lambda}^{+\lambda} f(x)dx = 1$
(iii) $\left[P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx\right]$
</td><td></td></tr>
<tr><td>5.8</td><td>1. විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක ගණිතමය අපේක්ෂාව විචලතාව හා සම්මත අපගමනය අර්ථ දක්වයි.</td><td>
X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයකට අනුබද්ධව සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය $P(x)$ යැයි ගනිමු.
$P(x) = p(X = x)$; $x = x_i,\ i = 1, 2, \ldots n$
$= 0$; අනෙක් විට
X හි මධ්‍යනය හෝ අපේක්ෂිත අගය $E(X)$ මගින් අංකනය කරනු ලබන අතර
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$
X හි විචලතාව $Var(X)$ ලෙස අංකනය කරනු ලබන අතර $Var(X) = E[X - E(X)]^2$
$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$
</td><td>05</td></tr>
</table>

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		$\left[\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p\left(x_i\right)\right]$ X හි සම්මත අපගමනය σ ලෙස අංකනය කරනු ලබන අතර $\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{X})}$ වේ. a හා b යනු නියත නම් $\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b)=a\mathrm{E}(x)+b$ සහ $\mathrm{Var}(ax+b)=a^2\mathrm{Var}(\mathrm{X})$ වේ.	
	2. සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක ගණිතමය අපේක්ෂාව හා විචලතාව සහ සම්මත අපගමනය අර්ථ දක්වයි.	X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයකට අනුබද්ධව සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය $p(x)$ යයි ගනිමු. X හි මධ්‍යන්‍ය හෝ අපේක්ෂිත අගය $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ මගින් අංකනය කරනු ලබන අතර $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ X හි විචලතාවය $\mathrm{Var}(\mathrm{X})$ මගින් අංකනය කරනු ලබන අතර $\mathrm{Var}(\mathrm{X})=\left[\mathrm{E}x-\mathrm{E}(x)\right]^2$ $\mathrm{Var}(\mathrm{X})=\mathrm{E}\left[x-\mathrm{E}(x)\right]^2=\mathrm{E}\left(x^2\right)-\left[\mathrm{E}(x)\right]^2$ $\mathrm{E}(x)=-\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ X හි සම්මත අපගමනය σ ලෙස අංකනය කරනු ලබන අතර $\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{X})}$ වේ. a හා b යනු නියත නම් $\mathrm{E}(ax+b)=a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$ සහ $\mathrm{Var}(ax+b)=a^2\mathrm{Var}(\mathrm{X})$ වේ.	
5.9	X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයේ සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය පැහැදිලි කරයි.	සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක x අගය දක්වා වූ සම්භාවිතාවයන්ගේ ඓක්‍යය මගින් සමුච්චිත සම්භාවතාව ලබා දෙයි. සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය $\mathrm{F}(x)$ ලෙස ලියනු ලැබේ.	02

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		(i) X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයේ සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය $P(X_i)$ නම් $P(X_i) = \begin{cases} p(X = x_i); x = x_1, x_2, \ldots, x_n \\ 0; \text{ වෙනත් අගය සඳහා} \end{cases}$ සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය $F(t)$ මගින් දෙනු ලබන අතර $F(t) = p(x \le t)$ $= \sum_{x=x_i}^{t} p(x = x_i)$ (ii) x සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයේ සම්භාවතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය නම් $f(x)$ නම් සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය $F(t)$ මගින් දෙනු ලබන අතර $F(t) = p(x \le t)$ $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$	
6.1	1. ඒකජ ප්‍රක්‍රමණය යනු කුමක්දැයි පැහැදිලි කරයි.	**ඒකජ ප්‍රකමණය** ඒකජ ප්‍රකමණ ක්‍රමය යනු ගණිතමය ප්‍රශස්තකරණ ශිල්පයකි. එනම්, සංරෝධන යටතේ ව්‍යාප්තියක අරමුණක් උපරිම කරණය හෝ අවම කරණය සඳහා යොදා ගන්නා ශිල්පයකි. නිදසුනඃ ලාභය උපරිමකරණය වියදම අවමකරණය	12
	2. ගැටලු විසඳීමේ ක්‍රම ප්‍රකාශ කරයි.	පහත දැක්වෙන ක්‍රම සාකච්ඡා කරන්න. (i) විසඳුම් රහිත ගැටලු (ii) තනි පිළිතුරු සහිත ගැටලු (iii) බහු පිළිතුරු සහිත ගැටලු	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	3. ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ ආකෘති නිර්මාණය කරයි.	පහත සඳහන් ආකාරවලට ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ ගැටලුවක ආකෘතියක් ගොඩ නැගීම පැහැදිලි කරන්න. • තීරණ විචල්‍ය • අරමුණු ශ්‍රිතය • සංරෝධක • නිර්සෘණ අවශ්‍යතා විවිධ ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ ආකෘති සාකච්ඡා කරන්න. නිදසුන්: $cx+dy \leq k_1$ $cx+fy \geq k_2$ $x \geq 0, y \geq 0$ යන සංරෝධකවලට යටත්ව $Z = ax+by$ හි උපරිම හෝ අවම අගය සෙවීම සාකච්ඡා කරන්න.	
6.2	1. ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ ගැටලුවක විසඳුම ප්‍රස්තාරිකව නිර්ණය කරයි.	තීරණය කළ යුතු විචල්‍යයන් දෙකක් අඩංගු ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ ආකෘති ප්‍රස්තාරික ව විසඳන ආකාරය පහදා දෙන්න. සුදුසු උදාහරණ භාවිත කරන්න.	06
	2. ශක්‍යතා පෙදෙස හඳුනා ගනියි.	1. ඒකජ ප්‍රක්‍රමණයක ශක්‍යතා විසඳුම 2. ඒකජ ප්‍රක්‍රමණයක ශක්‍යතා පෙදෙස පැහැදිලි කරන්න. උපරිමකරණ ආකෘති උදාහරණ: ලාභය අවමකරණ ආකෘති උදාහරණ: වියදම අඩංගු විසඳුම් සාකච්ඡා කරන්න.	
	3. ප්‍රශස්ත විසඳුම හඳුනා ගනියි.	ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ ආකෘතියක ශක්‍යතා විසඳුම පැහැදිලි කරන්න. • විසඳුම් රහිත ගැටලු • තනි පිළිතුරු සහිත ගැටලු • බහු පිළිතුරු සහිත ගැටලු ගැටලු ඉහත අවස්ථා යටතේ සාකච්ඡා කරන්න. සටහන: විචල්‍ය දෙකකට වැඩි ආකෘති විසඳීම සඳහා සරල ක්‍රමය භාවිත කළ හැකි බව පැහැදිලි කරන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		පරිගණක සංවර්ධනය කිරීමෙන් ගැටලු විසඳීමේ ක්‍රමවේදය වඩාත් සරල වේ. Ms Excel ගැටලු විසඳීම භාවිත කළ හැකි බව ප්‍රකාශ කරන්න. ගැටලු විසඳීමේ ක්‍රමවේදය සාකච්ඡා කළ යුතු නැත. මෙහි අරමුණ විචල්‍ය දෙකකට වඩා වැඩි ගැටලු විසඳීම සඳහා සිසුන් වෙනත් ක්‍රමවේද ඇති බව දැනුවත් කිරීමයි.	

තුන්වැනි වාරය

13 ශ්‍රේණිය - තුන්වැනි වාරය - ගණිතය I

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
9.1	1. න්‍යාසයක් අර්ථ දක්වයි	**න්‍යාස** සෘජුකෝණාස්‍ර සංඛ්‍යා වැලක් ලෙස න්‍යාසය හඳුන්වා න්‍යාස A, B, C, ... ඉංග්‍රීසි අකුරුවලින් අංකනය කරන්න. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$	05
	2. න්‍යාසයක තරම ලියා දක්වයි	A න්‍යාසයක පේළි m ද තීර n ද ඇත්නම් එහි තරම $m \times n$ ලෙස ලියා දක්වන්න. A න්‍යාසය $(a_{ij})_{m \times n}$ ලෙස ලියා දැක්විය හැකි බව පැහැදිලි කරන්න. **න්‍යාසයක අවයව:** a_{ij} යනු i පේළියේ j තීරයේ අවයවය බව ප්‍රකාශ කරන්න. **පේළි න්‍යාසය:** එක් පේළියක් පමණක් අඩංගු න්‍යාසයක් පේළි න්‍යාසයක් හෝ පේළි දෛශිකයක් ලෙස හඳුන්වා දෙන්න. **තීර න්‍යාසය:** එක් තීරයක් පමණක් අඩංගු න්‍යාසයක් තීර න්‍යාසයක් හෝ තීර දෛශිකයක් ලෙස හඳුන්වා දෙන්න. **ශූන්‍ය න්‍යාසය:** න්‍යාසයක සියලු ම අවයව ශූන්‍ය වේ නම් එය ශූන්‍ය න්‍යාසයක් ලෙස හඳුන්වා දෙන්න.	
	3. න්‍යාසයක සමානතාව අර්ථ දක්වයි.	A හා B යනු එක ම තරම් සහිත න්‍යාස 2ක් ලෙස ගන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		A = $(a_{ij})_{m\times n}$, B= $(b_{ij})_{m\times n.}$ සියලු $i,\ j$ සඳහා $a_{ij} = b_{ij}$ නම් A =B බව පැහැදිලි කරන්න.	
	4 න්‍යාස ආකලනය අර්ථ දක්වයි.	න්‍යාස දෙකක් ආකලනය කිරීම සඳහා අවශ්‍යතා ප්‍රකාශ කරන්න. න්‍යාස දෙකක තරම සමාන විට ඒවායේ අනුරූප අවයව එකතු කිරීමෙන් න්‍යාස දෙක ආකලනය කළ හැකි බව පැහැදිලි කරන්න. A = $(a_{ij})_{m\times n}$, B = $(b_{ij})_{m\times n}$ ලෙස ගන්න. එවිට A +B = $(a_{ij})_{m\times n}$ + $(b_{ij})_{m\times n}$ = $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ (i) ආකලනය සංවෘත බවත් (ii) න්‍යාදේශ බවත්, එනම් A + B = B+A (iii) විසටනය තෘප්ත කරන බවත් එනම් (A +B) +C = A + (B+C) ප්‍රකාශ කරන්න. ආකලනය ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
	5 න්‍යාසයක් අදිශයකින් ගුණ කිරීම අර්ථ දක්වයි.	A = $(a_{ij})_{m\times n}$ ද $\lambda \in \mathbb{R}$ ද ලෙස ගන්න. එවිට සියලු i, j සඳහා $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$.බවත් $\lambda = -1$ විට (–1)A = – A න්‍යාසය A න්‍යාසයේ සෘණ න්‍යාසය ලෙස හඳුන්වන බවත් ප්‍රකාශ කරන්න. A හා B යනු එක ම තරමේ න්‍යාස දෙකක් යැයි ගන්න. එවිට, A – B = A + (–B) බව ප්‍රකාශ කරන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	6. න්‍යාස ගුණිතය අර්ථ දක්වයි	A = $\left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ ද B = $\left(b_{ij}\right)_{q\times n}$ ද ලෙස ගන්න. $p = q$ විට, AB ගුණිතය පහත සඳහන් පරිදි අර්ථ දක්වන්න. A= $\left(a_{ij}\right)_{m\times p}$ ද B= $\left(b_{ij}\right)_{p\times n}$ ද නම්, එවිට AB = $\left(\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj})\right)_{m\times n}$ වේ. එහි තරම $m \times n$ බව පැහැදිලි කරන්න. (i) AB අර්ථ දැක්වූවත් BA අර්ථ දැක්වීම අනිවාර්ය නොවන බවත් (ii) සාධාරණ වශයෙන් AB $\neq$ BA බවත් සාකච්ඡා කරන්න. න්‍යාස ගුණිතය ආශ්‍රිත ගැටලු සුළු කිරීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
9.2	1. න්‍යාසවල විශේෂ අවස්ථා පැහැදිලි කරයි.	තරම $m \times n$ වූ A න්‍යාසයක, $m = n$ වූ විට, A න්‍යාසය ගණය n වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ලෙස හඳුන්වන බව පැහැදිලි කරන්න. A යනු ගණය n වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ලෙස ගන්න. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\left(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}\right)$ යනු නායක (ප්‍රධාන) විකර්ණයයි. * $a_{ij} = 1$; සියලු $i = j$ $a_{ij} = 0$; සියලු $i \neq j$ විට ගණය n වූ A සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ඒකක න්‍යාසයක්	07

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		ලෙස හඳුන්වන බවත් I_n මගින් අංකනය කරන බවත් ප්‍රකාශ කරන්න. සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක සියලු $i \neq j$ සඳහා $a_{ij} = 0$ නම් එම න්‍යාසය විකර්ණ න්‍යාසයක් ලෙස හඳුන්වන බව ප්‍රකාශ කරන්න.	
	2. ගැටලු විසඳීම සඳහා න්‍යාස ප්‍රමේයයන් භාවිත කරයි.	A, B,C සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා ගුණිතය යටතේ • A(BC) = (AB) C (න්‍යාදේශ න්‍යාය) • A(B+C) = AB + AC (විසටන න්‍යාය) • (B + C)A = BA + CA (විසටන න්‍යාය) • A+ 0 = A = 0+ A [0– ශුන්‍ය න්‍යාසයකි] • A × I= A =I × A AB = 0 වීම සඳහා A =0 හෝ B = 0 හෝ වීම අවශ්‍ය නොවන බව සඳහන් කරන්න. [0– ශුන්‍ය න්‍යාසයකි] $f(x)$ යනු x හි බහුපද ශ්‍රිතයක් විට f (A) සොයන අන්දම පැහැදිලි කරන්න.	
	3. න්‍යාසයක පෙරළුම අර්ථ දක්වයි.	A = $(a_{ij})_{m\times n}$ A යනු තරම $m \times n$ වූ න්‍යාසයක් ලෙස ගන්න. එවිට A න්‍යාසයේ පෙරළුම $A^T = (b_{ij})_{n\times m}$ මෙහි $b_{ij} = a_{ji}$ සියලු i, j සඳහා වන බවත් A^T, මගින් අංකනය කරන බවත් පැහැදිලි කරන්න. න්‍යාසයක පෙරළුමෙහි පහත සඳහන් ගුණ සාකච්ඡා කරන්න. • $(A+B)^T = A^T + B^T$	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		• $(KA)^T = K.A^T$, $k \in \mathbb{R}$ • $(A^T)^T = A$ • $(AB)^T = B^T \cdot A^T$	
	4. ගණය 3 × 3 වූ න්‍යාසයක අවයවයක කණිෂ්ඨය අර්ථ දක්වයි.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ලෙස ගන්න. i පේළියේ j තීරයේ කණිෂ්ඨය M_{ij} මගින් අංකනය කරන අතර එහි අගය න්‍යාසයේ i පේළියේ j තීරයේ අදාළ 2 × 2 නිශ්චායකයක් මගින් ලබා ගත හැකි බව පැහැදිලි කරන්න. මෙහි $i, j = 1,2,3$ නිදසුනක් ලෙස $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $= a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}$ නිදසුන් මගින් පැහැදිලි කර කණිෂ්ඨ සෙවීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	
	5. ගණය 3×3 වූ න්‍යාසයක සහ-සාධකය අර්ථ දක්වයි.	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 3 × 3 ලෙස ගන්න. $a_{ij} (1 \le i, j \le 3)$, අවයවයේ සහසාධකය A_{ij} මගින් අංකනය කරන බවත් එහි අගය $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ මගින් ලැබෙන බවත් ප්‍රකාශ කරන්න.	
9.3	1. න්‍යාසයක ප්‍රතිලෝමය අර්ථ දක්වයි.	දී ඇති A න්‍යාසයකට AB = I = BA වන පරිදි B න්‍යාසයක් පවතී නම් B න්‍යාසය A	05

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		න්‍යාසයේ ප්‍රතිලෝමය ලෙස හඳුන්වනු ලබන අතර එය A^{-1} මගින් අංකනය කරන බව පැහැදිලි කරන්න. $A A^{-1} = I = A^{-1}A.$ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණක් ප්‍රතිලෝම න්‍යාස අර්ථ දක්වන බව සටහන් කරන්න. ප්‍රතිලෝම න්‍යාසයක පහත සඳහන් ගුණ පැහැදිලි කරන්න. $(A^{-1})^{-1} = A$ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$	
	2. ගණය 2×2 වූ න්‍යාසයක ප්‍රතිලෝමය සොයයි.	$A = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$, ලෙස දී ඇති න්‍යාසයක් නම්, A න්‍යාසයේ නිශ්චායකය $\det(A) = \lvert A \rvert = ad - bc$ මගින් දක්වන බවත් මෙහි $\lvert A \rvert \neq 0$ විට $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A \rvert}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ මගින් A හි ප්‍රතිලෝමය ලැබෙන බවත් ප්‍රකාශ කර නිදසුන් මගින් පැහැදිලි කරන්න.	
	3. විචල්‍ය දෙකක් සහිත සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සඳහා න්‍යාස භාවිත කරයි.	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$ සමගාමී සමීකරණ දෙක ගන්න. ඉහත සමීකරණ දෙක AX = C ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ද $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ලෙස ගන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
8.1	1. නිශ්චායක ප්‍රසාරණය කරයි.	A^{-1} පවතින විට, $A^{-1}AX = A^{-1}C$ $X = A^{-1}C$ බවත් පෙන්වා දෙන්න. සමගාමී සමීකරණවල විසඳුම් (i) අනන්‍ය වීම (ii) අපරිමිත වීම (iii) විසඳුම් නොමැති වීම යන අවස්ථා සාකච්ඡා කරන්න. එක් එක් අවස්ථාවන්ට අදාළ ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවන්න. **නිශ්චායක** (a) 2×2 සහ 3×3 ආකාර සඳහා නිශ්චායක ලියා දක්වන්න. 2×2 නිශ්චායකයක ප්‍රසාරණය $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ නම් $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, ද මෙහි a_1, a_2, b_1, b_2 තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන බව ප්‍රකාශ කරන්න. (b) 3×3 නිශ්චායකයක ප්‍රසාරණය $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ නම් එවිට, $\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ $= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$ බව ප්‍රකාශ කරන්න.	10

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		මෙහි $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන බව සඳහන් කරන්න. **සටහන:** නිශ්චායකයක් ඕනෑ ම පේළියක් ඔස්සේ හෝ ඕනෑ ම තීරයක් ඔස්සේ ප්‍රසාරණය කළ හැකි බවත් ඒ සෑම විට ම එක ම ප්‍රතිඵලය ලැබෙන බවත් ප්‍රකාශ කරන්න.	
	2. නිශ්චායකයක ගුණ ප්‍රකාශ කරයි.	2×2 සහ 3×3 නිශ්චායකවල පහත සඳහන් ගුණ සාකච්ඡා කරන්න. 1. Δ_1 නිශ්චායකයේ පේළි දෙකක් හෝ තීර දෙකක් මාරු කිරීමෙන් Δ_2 නිශ්චායකය ලැබේ නම් $\Delta_2 = \Delta_1$ වේ. 2. නිශ්චායකයක පේළි දෙකක් හෝ තීර දෙකක් සමාන නම් එම නිශ්චායකයේ අගය ශුන්‍ය වේ. 3. නිශ්චායකයක ඕනෑ ම පේළියක (තීරයක) ගුණාකාරයක් තවත් පේළියකට (තීරයකට) එකතු කළ විට එම නිශ්චායකයේ අගය වෙනස් නොවේ. 4. නිශ්චායකයක (Δ) එක් පේළියක් λ අදිශයකින් ගුණකළ විට නිශ්චායකයේ අගය $\lambda \Delta$ වේ. 5. එක් පේළියක (තීරයක) සියලු ම අවයව ශුන්‍ය වේ නම් නිශ්චායකයේ අගය ශුන්‍ය වේ. 6. $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_1+b_1 \\ x_2 & y_2 & a_2+b_2 \\ x_3 & y_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$ ද	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_1 \\ x_2 & y_2 & a_2 \\ x_3 & y_3 & a_3 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & b_1 \\ x_2 & y_2 & b_2 \\ x_3 & y_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ලෙස ගන්න. එවිට $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ වේ.	
8.2	1. සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සඳහා නිශ්චායක භාවිත කරයි.	$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ —— (i) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ —— (ii) සමගාමී සමීකරණවල විසඳුම් සාකච්ඡා කරන්න. සමීකරණ විසඳීම සඳහා "ක්‍රැමර්ගේ නීතිය" (Cramer's rule) යොදා ගන්න. **විසඳුම:** $\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \quad \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ආකාරයට ලබා ගත හැකි බව පෙන්වා දෙන්න. විචල්‍ය 3ක් සහිත සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සාකච්ඡා කරන්න. $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$ සමීකරණ විසඳීම සඳහා "ක්‍රැමර්ගේ නීතිය" (Cramer's rule) භාවිතයට ගන්න. **විසඳුම:** $\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}$ $\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$ ආකාරයට වන බව ප්‍රකාශ කරන්න.	06

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
12.1	1. පථයක් ලෙස වෘත්තය අර්ථ දක්වයි.	**වෘත්ත** තලයක වූ අචල ලක්ෂ්‍යයක සිට නියත දුරකින් එම තලය මත චලනය වන ලක්ෂ්‍යයක පථය වෘත්තයක් ලෙස අර්ථ දක්වන්න. අචල ලක්ෂ්‍යය, කේන්ද්‍රය ලෙස හඳුන්වන බවත් නියත දුර අරය ලෙස හඳුන්වන බවත් ප්‍රකාශ කරන්න.	02
	2. වෘත්තයක සමීකරණය ලබා ගනියි.	කේන්ද්‍රය (0,0) වූ ද අරය r වූ ද වෘත්තයක සමීකරණය $x^2+y^2=r^2$ ලෙස ලබා ගන්න. කේන්ද්‍රය (a,b) වූ ද අරය r වූ ද වෘත්තයක සමීකරණය $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ලෙස ලබා ගන්න.	
	3. වෘත්තයක සාධාරණ සමීකරණය විවරණය කරයි.	වෘත්තයක සාධාරණ සමීකරණය $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ලෙස දැක්විය හැකි බවත් එහි කේන්ද්‍රය $(-g,-f)$ බවත් එම වෘත්තයේ අරය $\sqrt{g^2+f^2-c}$ $(g^2+f^2-c\geq 0)$ බවත් පැහැදිලි කරන්න.	
	4. විෂ්කම්භයක අන්ත දෙක දී ඇති විට වෘත්තයේ සමීකරණය සොයයි.	විෂ්කම්භයක අන්ත දෙක (x_1,y_1), (x_2,y_2) ලක්ෂ්‍ය දෙක බව දී ඇති විට, වෘත්තයේ සමීකරණය $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. එක් එක් ඉගෙනුම් ඵලවලට අදාළ ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	1. වෘත්තයක් අනු-බද්ධයෙන් ලක්ෂ්‍යයක පිහිටීම හඳුනා ගනියි.	p ලක්ෂ්‍යය (x_0, y_0) යැයි ද වෘත්තයේ සමීකරණය $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යැයි ද දී ඇති විට, $x_0^2 + y_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c \lessgtr 0$ වීම අනුව p ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය තුළ හෝ වෘත්තය මත හෝ වෘත්තයෙන් පිටත හෝ පිහිටන බව පැහැදිලි කරන්න. නිදසුන් ගෙනහැර දක්වන්න.	01
12.3	1. වෘත්තයක් අනු-බද්ධයෙන් සරල රේඛාවක පිහිටීම සාකච්ඡා කරයි.	සරල රේඛාවක සමීකරණය $U \equiv lx + my + n = 0$ යැයි ද වෘත්තයක සමීකරණය $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ යැයි ද ගන්න. (i) $S = 0$ සහ $U = 0$ සමීකරණ විසඳීමෙන් ලබා ගත් x හි හෝ y හි හෝ වර්ගජ සමීකරණයෙහි විවේචකය. (ii) වෘත්තයේ අරය සහ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට සරල රේඛාවට ඇති දුර යන ආකාර දෙක ම සැලකීමෙන් පහත සඳහන් අවස්ථා පිළිබඳ ව සාකච්ඡා කරන්න. (a) සරල රේඛාව වෘත්තය ඡේදනය වීම (b) සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කිරීම (c) සරල රේඛාව වෘත්තයෙන් පිටත පිහිටීම ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	04
	2. වෘත්තය මත වූ ලක්ෂ්‍යයක දී ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලබා ගනියි.	$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ වෘත්තය මත වූ $P(x_0, y_0)$ ලක්ෂ්‍යක දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$ බව පෙන්වන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
12.4	1. බාහිරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග සොයයි.	වෘත්තයක සමීකරණය $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ද බාහිරින් පිහිටි ලක්ෂයක් $P(x_0, y_0)$ ලෙස ද ගන්න. ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග $\sqrt{x_0^2+y_0^2+2gx_0+2fy_0-c}$ මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.	05
	2. බාහිරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයයි.	බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ලබා ගන්න.	
	3. ස්පර්ශ ජ්‍යායයේ සමීකරණය ලබා ගනියි.	වෘත්තයක සමීකරණය $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ යැයි ද බාහිරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් $P = (x_0, y_0)$ යැයි ද ගන්න. එවිට ස්පර්ශ ජ්‍යායයේ සමීකරණය $xx_0+yy_0+g(x+x_0)+f(y+y_0)+c=0$ මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	

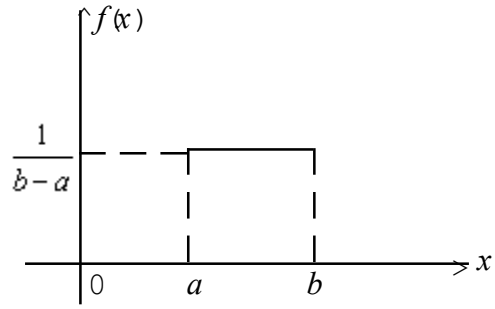
13 ශ්‍රේණිය - තුන්වැනි වාරය - ගණිතය II

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
5.10	1. සම්භාවිතා ගණනය කිරීම සඳහා බ'නුලී ව්‍යාප්තිය විස්තර කරයි.	**සංඛ්‍යානය** X යනු, සම්භාවිතා පිළිවෙළින් $(1-\theta)$ හා θ $(0 < \theta < 1)$ වන සේ 0 හා 1 යන අගය ගන්නා සසම්භාවී විචල්‍යයක් යැයි ගනිමු. එවිට θ පරාමිතය සහිත, X හි සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය $p(x)$ $p(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$; $x = 0, 1$ $= 0$; අනෙක් විට ලෙස දෙනු ලැබේ. මෙම ව්‍යාප්තිය වගුවක් ලෙස පහත දැක් වේ. x | 0 | 1 $p(x)$ | $1-\theta$ | θ සටහන: බ'නුලී ව්‍යාප්තිය, ද්විපද ව්‍යාප්තිය වැනි ව්‍යාප්තිවල තැනුම් ඒකකයයි. පහත දැක්වෙන ආකාරයේ උදාහරණ මගින් විදහා දක්වන්න. ***නිදසුන:*** මල්ලක එකම තරමේ සුදු බෝල 6ක් හා රතු බෝල 3ක් අඩංගු වේ යැයි ගනිමු. අහඹු ලෙස මල්ලෙන් බෝලයක් ගනු ලැබේ. ලැබුණු බෝලය රතු නොවේ නම් $X = 0$ ද රතු වේ නම්, $X = 1$ ද ලෙස X සසම්භාවී විචල්‍යය අර්ථ දක්වමු. එවිට $p(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(1-\frac{2}{3}\right)^{1-x}$, $x = 0, 1$ නම් $= 0$ අනෙක් විට ව්‍යාප්තිය පහත දැක්වේ. x | 0 | 1 $p(x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ බ'නුලී ව්‍යාප්තියක දී $E(X) = \theta$ බව ද, $Var(X) = \theta(1-\theta)$ බව ද ලැබේ.	15

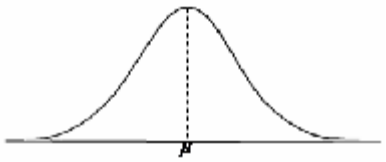
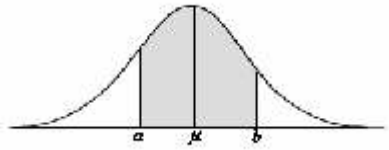
<table>
<tr><th>නිපුණතා මට්ටම</th><th>ඉගෙනුම් ඵල</th><th>විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්</th><th>කාලච්ඡේද ගණන</th></tr>
<tr><td></td><td>2. විවික්ත ඒකාකාර ව්‍යාප්තිය විස්තර කරයි.</td><td>X යනු $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ යන සමභව්‍ය ප්‍රභින්න අගය n සහිත සසම්භාවී විචල්‍යයක් යැයි ගනිමු.
එවිට X විචල්‍යය, විවික්ත ඒකාකාර ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරයි. X හි සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය $p(x) = \frac{1}{n}$; $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ සඳහා
$= 0$; අනෙක් විට
නිදසුන් මගින් විදහා දක්වන්න.
නිදසුනඃ නොනැඹුරු ඝනකාකාර දාදු කැටයක් උඩ දැමීම සලකමු.
X යනු වැටෙන අය ගණන දැක්වෙන සසම්භාවී විචල්‍යය යැයි ගනිමු.
එවිට, X හි සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය;
$p(x) = \frac{1}{6}$; $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ විට
$= 0$;අනෙක් විට
ව්‍යාප්තියඃ
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3. සම්භාවිතා ගණනය කිරීම සඳහා ද්විපද ව්‍යාප්තිය විස්තර කරයි.</td><td>ද්විපද ව්‍යාප්ති ආකෘතියක් භාවිතය සඳහා තෘප්ත විය යුතු අවශ්‍යතාඃ
1. නැහැසුම් ගණන (පරීක්ෂණය කළ වාර ගණන) n, පරිමිත වීම.
2. නැහැසුම් ස්වායත්ත වීම.
3. එක් එක් නැහැසුමේ දී ලැබෙන ප්‍රතිඵලය සාර්ථකයක් හෝ අසාර්ථකයක් පමණක් වීම.
4. සාර්ථකයක සම්භාවිතාව p යන්න, සෑම නැහැසුමක දීම එක ම වීම.</td><td></td></tr>
</table>

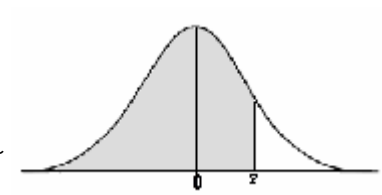
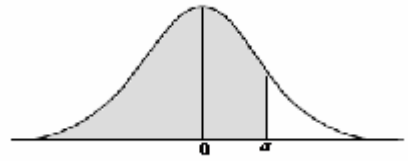
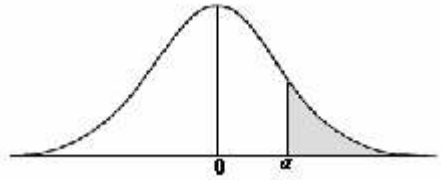
නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යය X යනු, නැහැසුම් n ගණනක දී ලැබුණු සාර්ථක ගණන යැයි ගනිමු. ඉහත අවශ්‍යතා තෘප්ත වෙයි නම්, X යන්න, ද්විපද ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන්නේ යැයි කියනු ලැබේ. මෙය X Bin (n, p) ලෙස දක්වනු ලැබේ. නැහැසුම් ගණන වන n සහ සාර්ථකයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව වන p යන දෙක ම, ව්‍යාප්තිය පූර්ණ ලෙස විස්තර කිරීම සඳහා අවශ්‍ය වේ. p හා n ට ද්විපද ව්‍යාප්තියේ පරාමිතීන් යැයි කියනු ලැබේ. X $\sim$ Bin (n, p) යැයි ගනිමු. X හි සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය; $P(x) = P(X = x) = {}^{n}C_{x}(1-p)^{n-x} \cdot p^{x}$; $x = 0,1,2,\ldots,$ n සඳහා $= 0$; අනෙක් විට ලෙස දෙනු ලැබේ. E(X) = np හා Var (X) = npq වේ. මෙහි $q = 1 - p$ නිදසුන් මගින් විදහා දක්වන්න. නිදසුන: නොනැඹුරු දාදු කැටයක් 10 වරක් උඩ දැමීම සලකමු. X යනු එහි උඩු මුහුණතේ "6" වැටුණු වාර ගණන යැයි ගනිමු. එවිට, X Bin $\left(10, \frac{1}{6}\right)$ $P(x) = {}^{10}C_{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}$; $x = 0,1,2,3,4,5,6,\ldots 10$ සඳහා $= 0$; අනෙක් විට	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	4. සම්භාවිතා ගණනය කිරීම සඳහා පොයිසෝන් ව්‍යාප්තිය විස්තර කරයි.	1. දෙන ලද කාල හෝ අවකාශ ප්‍රාන්තරයක් තුළ සිද්ධි තනි තනිව හා අහඹු ලෙස සිදුවීම. 2. දෙන ලද ප්‍රාන්තරය තුළ සිදුවීම් ගණනේ මධ්‍යන්‍යය λ ,දන්නා පරිමිත අගයක් වීම. යන අවශ්‍යතා තෘප්ත කරයි නම්, X යන්න, පරාමිතය λ ,සහිත පොයිසෝන් ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන්නේ යැයි කියනු ලැබේ. එය X $\sim P_0(\lambda)$ ලෙස දක්වනු ලැබේ. X හි **සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය** $P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}, x=0,1,2,3,\ldots$ ලෙස අර්ථ දක්වනු ලැබේ. E(X) = λ හා Var (X) = λ වේ. සටහන: $P(X=0)=e^{-\lambda}, P(X=1)=\lambda\cdot e^{-\lambda}$ නිදසුන් මගින් විදහා දක්වන්න. නිදසුන්: 1. පැයක් තුළ ගිලන් රථ පාලන ඒකකයකට ලැබුණු හදිසි ඇමතුම් සංඛ්‍යාව 2. විශේෂිත පිවිසුම් ස්ථානයකට මිනිත්තු 10ක කාල ප්‍රාන්තරයක් තුළ ළඟා වන වාහන සංඛ්‍යාව.	
	5. ද්විපද ව්‍යාප්තියකට සන්නිකර්ෂණයක් ලෙස පොයිසෝන් ව්‍යාප්තිය භාවිත කරයි.	n විශාල ($n>50$) ද, p කුඩා ($p<0.1$), ද වන විට, X Bin (n,p) ද්විපද ව්‍යාප්තිය, එම මධ්‍යන්‍යය ම සහිතව X $P_0(np)$ ලෙස පොයිසෝන් ව්‍යාප්තියකට සන්නිකර්ෂනය කළ හැකි බව ප්‍රකාශ කරන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
5.11	1. සන්තතික ඒකාකාර (හෝ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර) ව්‍යාප්තිය පැහැදිලි කරයි.	$[a, b]$ ප්‍රාන්තරය තුළ සන්තතික ඒකාකාර (හෝ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර) ව්‍යාප්තියේ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය; $f(x) = \frac{1}{b-a}$; $a \le x \le b$ නම් $= 0$; අනෙක් විට ලෙස අර්ථ දක්වන බව ප්‍රකාශ කරන්න.  X සසම්භාවී විචල්‍යයට (a, b) ප්‍රාන්තරය තුළ සන්තතික ඒකාකාර (හෝ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර) ව්‍යාප්තියක් ඇති බව. $X \sim U(a, b)$ හෝ $X \sim R(a, b)$ හෝ ලෙස ලියා දක්වනු ලැබේ. a හා b ට, ව්‍යාප්තියේ පරාමිති යැයි කියනු ලැබේ. $E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$ සහ $Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$ බව පෙන්වන්න. සන්තතික ඒකාකාර ව්‍යාප්තියේ සමුච්චිත සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය $F(x)$ යන්න පහත දැක්වෙන ආකාරයට සෙවිය හැකි බව පෙන්වා දෙන්න. $X \sim U(a, b)$	15

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		$F(t) = P(X \le t) = \int_a^k \frac{1}{b-a} dt = \frac{t-a}{b-a}$ එනයින් $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \text{ නම්} \\ \frac{x-a}{b-a} & , a < x < b \text{ නම්} \\ 1 & , x \ge b \text{ නම්} \end{cases}$	
	2. ඝාතීය ව්‍යාප්තිය පැහැදිලි කරයි.	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$; $x \ge 0$ සඳහා $= 0$; අනෙක් විට මෙහි λ යනු ධන නියතයකි, යන සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය සහිත X නම් සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යය, ඝාතීය ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරන්නේ යැයි කියනු ලැබේ. λ ට, ව්‍යාප්තියේ පරාමිතය යැයි කියනු ලැබේ. [සටහන: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx = 1$] $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ හා $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ වේ. $P(X>a) = e^{-\lambda a}$ සහ $P(X > a+b \mid X > a) = e^{-\lambda b}$ $= P(X > b)$ බව පෙන්වන්න.	
	3. ප්‍රමත ව්‍යාප්තිය විස්තර කරයි.	X යනු සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක් යැයි ගනිමු. X යන්න, μ මධ්‍යන්‍යය සහ සම්මත අපගමනය σ, සහිත ප්‍රමත ව්‍යාප්තියක් වෙයි නම්, X ට, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$ මගින් දෙනු ලබන සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ඇත.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		මෙහි μ හා σ, පරාමිතීන් වේ. මෙය $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ලෙස දක්වනු ලැබේ. සම්මත ප්‍රමත වක්‍රයේ හැඩය හා එහි ලක්ෂණ පහත දැක්වෙන පරිදි ඉදිරිපත් කරන්න.  (i) එය සීනු හැඩැති වේ. (ii) එය මධ්‍යන්‍යය (μ) වටා සමමිතික ය. (iii) එය $-\infty$ සිට $+\infty$ දක්වා පැතිරේ. (iv) $f(x)$ හි උපරිම අගය $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ වේ. (v) වක්‍රය යට මුළු වර්ගඵලය ඒකක 1 වේ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ නම්, * ව්‍යාප්තියෙන් ආසන්න වශයෙන් 95% ක් $\mu - 2\sigma$, හා $\mu + 2\sigma$, අතර වේ. * * ව්‍යාප්තියෙන් ආසන්න වශයෙන් 99.75% ක් $\mu - 3\sigma$, හා $\mu + 3\sigma$, අතර වේ. * $P(a < x < b)$ ලෙස දක්වනු ලබන, X හි අගය a හා b අතර වීමේ සම්භාවිතාව = a හා b අතර ප්‍රමත වක්‍රය යට වර්ගඵලය.  ඉහත කරුණු ද ඉදිරිපත් කරන්න.	
	4 සම්මත ප්‍රමත විචල්‍යය z අර්ථ දක්වයි.	සන්තතික සසම්භාවී X විචල්‍යය, මධ්‍යන්‍යය μ සහ සම්මත අපගමනය සහිත ප්‍රමත ව්‍යාප්තියක වේ යැයි ගනිමු.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		එනම් $X \sim N(\mu, \sigma)$ මධ්‍යන්‍යය 0 හා සම්මත අපගමනය 1 වන $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ලෙස අර්ථ දක්වනු ලබන Z විචල්‍යයේ ව්‍යාප්තියට සම්මත ප්‍රමත ව්‍යාප්තිය යැයි කියනු ලැබේ. එනම් Z N (0,1). Z ට, $\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$, $-\infty < Z < \infty$ යන සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ඇත. P(Z< z) = $\phi(z)$ වේ. ~ 	
	5. සම්භාවිතා ගණනය කිරීම සඳහා සම්මත ප්‍රමත වගු භාවිත කරයි.	සම්මත ප්‍රමත වගු භාවිත වන අභ්‍යාස දෙන්න. P(Z< a) = $\phi(a)$  P(Z > a) =1− $\phi(a)$  P(Z), දී ඇති විට Z සෙවීම සඳහා සම්මත ප්‍රමත චක්‍රය භාවිත කරන අයුරු පහදන්න. Z දී ඇති විට $\phi(z)$ ද, $\phi(z)$ දී ඇති විට z ද සෙවීමට සිසුන් යොමු කරන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	6. ද්විපද ව්‍යාප්තියක් සඳහා ප්‍රමත ව්‍යාප්තියේ සන්නිකර්ෂණ භාවිත කරයි.	සන්නිකර්ෂණය සඳහා පහත අවශ්‍යතා තෘප්ත විය යුතු ය. $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ ද n හා p $np > 5$ සහ $nq > 5$ (මෙහි $q = 1 - p$) ද නම්, එවිට $X \sim \mathrm{N}(np, npq)$.	
	7. සාන්තත්‍ය ශෝධනය විස්තර කරයි.	විවික්ත සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක් (ද්විපද ව්‍යාප්තිය) සන්තතික ව්‍යාප්තියක (ප්‍රමත ව්‍යාප්තිය) සන්නිකර්ෂණයක් ලෙස භාවිත කිරීමේ දී සාන්තත්‍ය ශෝධනය අවශ්‍ය වේ. එය නිදසුන් ඇසුරෙන් සාකච්ඡා කරන්න. නිදසුන්: සාන්තත්‍ය ශෝධනයේ දී, $P(3<X<5)$ යන්න $P(3.5<X<4.5)$ට ද, $P(X < 3)$ යන්න $P(X < 2.5)$ ට ද, $P(X > 5)$ යන්න $P(X > 5.5)$ ට ද, $P(X = 4)$ යන්න $P(3.5 < X < 4.5)$ ට ද පරිණාමනය වේ.	
7.	1. ජාලයක් යන්න පැහැදිලි කරයි.	**ජාල** ජාලයක් දෘශ්‍යමාන ලෙස නිරූපණය සඳහා නිෂ්පන්ද හා චාපයන්ගෙන් සැදි ප්‍රස්තාරයක් හෝ ජාල රූප සටහනක් භාවිත කළ හැකි බව පැහැදිලි කරන්න. පහත දැක්වෙන පද සාකච්ඡා කරන්න. • චාපය • ගැටය /නිෂ්පන්ද • ජාලය පහත දැක්වෙන ජාල ක්‍රමය භාවිත කර විසඳිය හැකි ප්‍රශ්න සාකච්ඡා කරන්න. • බෙදා හැරීම • ප්‍රවාහනය • මූල්‍ය කළමනාකරණය • ව්‍යාපෘති සැලසුම් කිරීම ආදිය.	20

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
	2. ජාල භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳයි.	**ව්‍යාපෘති කළමනාකරණය** • ව්‍යාපෘතියක් යන්න පැහැදිලි කරන්න. (ව්‍යාපෘතියක් සඳහා සැලසුම් කිරීම, සැලසුම් නිර්මාණය කිරීම, ඉලක්ක ඉෂ්ට කර ගැනීම සඳහා අරමුණු සපුරාලීම ආදියෙන් යුක්ත විය යුතු බව. සම්පූර්ණ කරන ලද නිවසක් සහ සඳ මත සිටින පුද්ගලයෙක් වැනි නිදසුනක් ගෙන පැහැදිලි කරන්න. • නිවසක් තැනීම වැනි කුඩා ව්‍යාපෘතියක් ගෙන සාකච්ඡා කරන්න. විවිධ ක්‍රියාකාරකම් හා පූර්ව ක්‍රියාකාරකම් සිසුන්ට හඳුන්වා දෙන්න. එනම්, තවත් ක්‍රියාකාරකමක් ආරම්භ කිරීමට පෙර නිම කළ යුතු ක්‍රියාකාරකම් මොනවාද යන්න ආදී වශයෙන් පැහැදිලි කර දෙන්න. • **ජාලයකින් නිරූපණය** කුඩා ව්‍යාපෘතියක් ජාල රේඛයකින් දක්වන අයුරු සාකච්ඡා කරන්න. මූලික නීති පිළිබඳ සාකච්ඡා කරන්න. පහත දැක්වෙන සංකල්ප පැහැදිලි කරන්න. අඩුතම ආරම්භක කාලය අඩුතම නිමැවුම් කාලය වැඩිතම ආරම්භක කාලය වැඩිතම නිමැවුම් කාලය හා ශිථිලය(slack) අවධි පථය සොයන ආකාරය සාකච්ඡා කරන්න. **උපරිම ගැලීම් ගැටලුව** උපරිම ගැලීම් ගැටලුව විස්තර කරන්න. බොහෝ සිද්ධීන් යම් චාපයක් තුළින් ගමන් කළ හැකි උපරිම ධාරිතාවය ඇති චාපවලින් දැක්වෙන ජාලයක් මගින් නිරූපණය කළ හැකි බව පහදන්න.	

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		මෙවැනි සිද්ධීන්හි දී ආරම්භක ස්ථානයේ සිට (ප්‍රභවය) අවසන් ස්ථානය (පර්යන්තය) දක්වා උපරිම ප්‍රමාණයක් ප්‍රවාහණය කිරීමට බලාපොරොත්තු වන බවත් මෙවැනි ගැටලුවක් උපරිම ගැලීම් ගැටලුවක් ලෙස හඳුන්වන බවත් ප්‍රකාශ කරන්න. විසඳීම් ඇල්ගොරිතමය සාකච්ඡා කරන්න. **අවම පරායන රුක් ගැටලුව** අවට පරායන රුක් ගැටලුව කුමක් දැයි සාකච්ඡා කරන්න. මෙම ගැටලුවෙහි දී සෑම ගැට/නිෂ්පන්ද යුගලක් අතර ම සම්බන්ධයක් පවතින පරිදි ජාලයක ශාඛා තෝරා ගැනීම සිදු කරන බව පහදන්න. • වාරිමාර්ග පද්ධතියක් හෝ විදුලි සංදේශ පද්ධතියක් සඳහා වූ ජාල භාවිතයෙන් මෙම ගැටලුවේ ස්වභාවය විස්තර කරන්න. • විසඳුම් ක්‍රියාවලිය සාකච්ඡා කරන්න.	
5.12	මාර්කෝප් දාම විස්තර කරයි.	**සම්භාවිතාව** $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ දෛශිකයක සියලු අවයව සෘණ නොවේ නම් සහ එම අවයවවල එකතුව 1 වේ නම්, එම දෛශිකය සම්භාවිතා දෛශිකයක් ලෙස හඳුන්වන්න. නිදසුන: $u = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$ $P = (p_{ij})$ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක, එක් එක් පේළිය සම්භාවිතා දෛශිකයක් වේ නම්, එම සමචතුරස්‍ර න්‍යාසය, අනුමානික න්‍යාසයක් ලෙස හඳුන්වන. නිදසුන: $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	10

නිපුණතා මට්ටම	ඉගෙනුම් ඵල	විෂය කරුණු කරගෙන යාම සඳහා අත්වැලක්	කාලච්ඡේද ගණන
		සටහන: A හා B යනු එකම ගණයේ අනුමානික න්‍යාස දෙකක් නම් AB ගුණිතය ද අනුමානික න්‍යාසයක් බව ප්‍රකාශ කරන්න. P නම් අනුමානික න්‍යාසයක සියලු අවයවවල කිසියම් බලයක් ධන වේ නම්, එම අනුමානික න්‍යාසය, සවිධි අනුමානික න්‍යාසයක් යැයි කියනු ලැබේ. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ සලකමු. අචල ලක්ෂ්‍ය සහ සවිධි අනුමානික න්‍යාස (2×2) P^m P යනු සවිධි අනුමැනික න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. එවිට, (i) P සඳහා t, නම් අනන්‍ය සම්භාවිතා දෛශිකයක් ඇති අතර එහි සියලු අවයව ධන වේ. (ii) P හි බල ඇතුළත් $P, P^2, \ldots$ අනුක්‍රමය T නම් න්‍යාසයකට ලඟා වන්නේ T න්‍යාසයෙහි සියලු පේළි tහි එක් එක් අචල ලක්ෂ්‍යය වන පරිදි ය. (iii) p යනු ඕනෑම සම්භාවිතා දෛශිකයක් නම්, එවිට $pP, pP^2, pP^3, \ldots$ දෛශික අනුක්‍රමය t හි අචල ලක්ෂ්‍යයක් කරා ලඟා වේ. මාර්කෝප් දාම ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට සිසුන් යොමු කරවන්න.	

අ. පො. ස.(උසස් පෙළ) ගණිතය
(2009 අගෝස්තු සිට ක්‍රියාත්මක වේ)

මෙම විෂය නිර්දේශය යටතේ පලමු විභාගය 2011 දී පැවැත් වේ.

විෂය නිර්දේශයෙහි පහත දැක්වෙන වෙනස් වීම් සිදුකොට ඇත.

1. යෝජිත කාලච්ඡේද සංඛ්‍යාව වෙනස්කොට ඇත.
2. 2.3 කොටස (තර්කය) විෂය නිර්දේශයෙන් ඉවත්කොට ඇත. (ගණිතය 1)
3. මාර්කෝප් දාම (5.12) විෂය නිර්දේශය සඳහා හඳුන්වා දී ඇත. (ගණිතය 11)

ඉහත වෙනස් වීම් ක්‍රියාත්මක කරන ලෙස ගුරු භවතුන්ගෙන් කාරුණිකව ඉල්ලමු.

ගණිතය සඳහා සංශෝධිත කාලච්ඡේද සංඛ්‍යාව

ගණිතය I

කොටස	අන්තර්ගතය	කාලච්ඡේද සංඛ්‍යාව		වෙනත්
		පැරණි	නව	කරුණු
1.1, 1.2, 1.3	තාත්ත්වික සංඛ්‍යා පද්ධති	12	12	
2.1, 2.2, 2.4	කුලක වීජීය	20	10	2.3 ඉවත්කර ඇත
2.5, 2.6	සම්බන්ධ	16	18	
3.1, 3.2	ඒක විචල්‍ය ශ්‍රිත	14	14	
3.3, 3.4	බහුපද ශ්‍රිත	7	7	
3.5, 3.6	වර්ගජ ශ්‍රිත හා වර්ගජ සමීකරණ	30	20	
3.7	පරිමේය ශ්‍රිත	5	5	
3.8	ඝාතීය ශ්‍රිත	6	10	
4.1	සරල වීජීය අසමානතා	10	7	
4.2	මාපාංක සහිත අසමානතා	10	8	
5.1, 5.2	සංකරණ හා සංයෝජන	27	27	
6	ද්විපද ප්‍රසාරණය	12	12	
7.1, 7.2, 7.3, 7.4	ශ්‍රේණි	23	23	
8.1, 8.2	නිශ්චායක	16	16	
9.1, 9.2, 9.3	න්‍යාස	17	17	
10.1	ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත	8	8	
10.2, 10.3, 10.4	ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත, සර්වසාම්‍යය හා සූත්‍ර	17	17	
10.5	සයින් සහ කෝසයින් සූත්‍ර	8	8	
11.1	කාටීසියානු ඛණ්ඩාංක	6	6	
11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7	සරල රේඛාව	23	23	
12.1, 12.2, 12.3, 12.4	වෘත්තය	10	12	
13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 13.5	ව්‍යුත්පන්න I	19	26	
13.6, 13.7	ව්‍යුත්පන්න II	10	14	
13.8, 13.9, 13.10 13.11	අනුකලනය	15	21	
13.12, 13.13, 13.14	අනුකලනය	10	14	
	එකතුව	351	355	

ගණිතය II

කොටස	අන්තර්ගතය	කාලච්ඡේද සංඛ්‍යාව		වෙනත්
		පැරණි	නව	කරුණු
1.1, 1.2	සංඛ්‍යානයේ මූලිකාංග	10	3	
2.1, 2.2, 2.3,2.4	දත්ත සහ තොරතුරු නිරූපණය	42	22	
3.1,3.2,3.3 3.4, 3.5	කේන්ද්‍රීක ප්‍රවණතා මිනුම් සහ අපකිරණ මිනුම්	46	22	
3.6, 3.7	කුටිකතාවය	18	03	
4	දර්ශකාංක	15	15	
5.1,5.2,5.3, 5.4,5.5	සම්භාවිතාව	50	35	
5.6, 5.7,5.8,5.9	සසම්භාවී විචල්‍ය සහ ලක්ෂණ	30	15	
5.10	සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති (විවික්ත)	20	15	
5.11	සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති (සන්තතික)	20	15	
5.12	මාර්කෝප් දාම	0	10	5.12 ඇතුළත් කර ඇත
6.1, 6.2	ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ	18	18	
7	ජාල භාවිතය	24	20	
	එකතුව	293	193	

ගණිතය ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ව්‍යුහය ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව මගින් නිකුත් කරනු ලැබේ.

පාසල පදනම් කරගත් තක්සේරුකරණය - හැඳින්වීම

ඉගෙනුම- ඉගැන්වීම සහ ඇගයීම අධ්‍යාපන ක්‍රියාවලියේ වැදගත් සංරචක තුනක් බවත් ඉගෙනුමෙහි සහ ඉගැන්වීමෙහි ප්‍රගතිය දැනගැනීම පිණිස ඇගයීම යොදා ගතයුතු බවත් සෑම ගුරුවරයකු විසින් ම දත යුතු පැහැදිලි කරුණකි. ඒවා අනොන්‍ය බලපෑමෙන් යුතු ව ක්‍රියා කරන බවත් එසේ ම එකිනෙකෙහි සංවර්ධනය කෙරෙහි එම සංරචක බලපාන බවත් ගුරුවරු දනිති. සන්තතික (නිරන්තරයෙන් සිදුවන) ඇගයීම් මූලධර්ම අනුව ඇගයීම සිදුවිය යුත්තේ ඉගෙනීම හා ඉගැන්වීම කෙරෙන අතරතුර දීය. මෙය ඉගෙනුම්- ඉගැන්වීම් ක්‍රියාවලිය අරම්භයේ දී හෝ මැද දී හෝ අග දී හෝ යන ඕනෑම අවස්ථාවක දී සිදුවිය හැකි බව තේරුම් ගැනීම ගුරුවරයකුට අවශ්‍ය ය. එලෙස තම සිසුන්ගේ ඉගෙනුම් ප්‍රගතිය ඇගයීමට අපේක්ෂා කරන ගුරුවරයකු ඉගෙනුම ඉගැන්වීම සහ ඇගයිම පිළිබඳ සංවිධානාත්මක සැලැස්මක් යොදාගත යුතුවෙයි.

පාසල පදනම් කරගත් ඇගයීම් වැඩපිළිවෙළ හුදු විභාග ක්‍රමයක් හෝ පරීක්ෂණ පැවැත්වීමක් හෝ නොවේ. එය හඳුන්වනු ලබන්නේ සිසුන්ගේ ඉගෙනීමත්, ගුරුවරුන්ගේ ඉගැන්වීමත් වැඩි දියුණු කිරීම සඳහා යොදාගනු ලබන මැදිහත් වීමක් වශයෙනි. මෙය සිසුන්ට සමීප ව සිටිමින් ඔවුන්ගේ ප්‍රබලතා සහ දුබලතා හඳුනාගෙන ඒවාට පිළියම් යොදමින් සිසුන්ගේ උපරිම වර්ධනය ළඟා කර ගැනීමට යොදාගත හැකි වැඩපිළිවෙලකි.

ඉගෙනුම් - ඉගැන්වීම් ක්‍රියාකාරකම් තුළින් අනාවරණ ක්‍රියාවලියකට සිසුන් යොමු කෙරෙන අතර, ගුරුවරයා සිසුන් අතර ගැවසෙමින් ඔවුන් ඉටුකරන කාර්ය නිරීක්ෂණය කරමින් මාර්ගෝපදේශකත්වය සපයමින් කටයුතු කිරිම පාසල් පදනම් කරගත් ඇගයීම් වැඩපිළිවෙළ ක්‍රියාත්මක කිරීමේ දී අපේක්ෂා කෙරේ. මෙහි දී ශිෂ්‍යයා නිරතුරු ව ඇගයීමට ලක්විය යුතු අතර, ශිෂ්‍ය හැකියා සංවර්ධනය අපේක්ෂිත අන්දමින් සිදුවන්නේ දැයි ගුරුවරයා විසින් තහවුරු කරනු ලැබිය යුතු වෙයි.

ඉගෙනීම සහ ඉගැන්වීම මගින් සිදුවිය යුත්තේ සිසුන්ට නිසි අත්දැකීම් ලබා දෙමින් ඒවා සිසුන් විසින් නිසි පරිදි අත්පත් කර ගෙන තිබේ දැයි තහවුරු කර ගැනීම ය. ඒ සඳහා නිසි මාර්ගෝපදේශය සැපයීම ය. ඇගයීමේ (තක්සේරු කිරීමේ) යෙදී සිටින ගුරුවරුන්ට තම සිසුන් සඳහා දෙයාකාරයක මාර්ගෝපදේශකත්වය ලබා දිය හැකි ය. එම මාර්ගෝපදේශ පොදුවේ හඳුන්වන්නේ ප්‍රති පෝෂණය (Feed Back) හා ඉදිරි පෝෂණය (Feed Forward) යනුවෙනි. සිසුන්ගේ දුබලතා හා නොහැකියා අනාවරණය කරගත් විට ඔවුන්ගේ ඉගෙනුම් ගැටලු මගහරවා ගැනීමට ප්‍රතිපෝෂණයත් සිසු හැකියා සහ ප්‍රබලතා හඳුනා ගත් විට දක්ෂතා වැඩි දියුණු කිරිමට ඉදිරි පෝෂණයත් ලබා දීම ගුරු කාර්යය වෙයි.

ඉගෙනුම්- ඉගැන්නුම් ක්‍රියාවලියේ සාර්ථකත්වය සඳහා පාඨමාලාවේ අරමුණු අතරෙන් කවර අරමුණු කවර මට්ටමින් සාක්ෂාත් කළ හැකි වූයේ දැයි හඳුනා ගැනීම සිසුන්ට අවශ්‍ය වෙයි. ඇගයීම් වැඩපිළිවෙල ඔස්සේ සිසුන් ළඟා කර ගත් ප්‍රවීණතා මට්ටම් නිශ්චය කිරීම මේ අනුව ගුරුවරුන්ගෙන් බලාපොරොත්තු වන අතර සිසුන් හා දෙමව්පියන් ඇතුළු වෙනත් අදාළ පාර්ශවවලට

සිසු ප්‍රගතිය පිළිබඳ තොරතුරු සන්නිවේදනය කිරීමට ගුරුවරුන් යොමුවිය යුතු ය. මේ සඳහා යොදාගත හැකි හොඳම ක්‍රමය වන්නේ සන්තතිකව සිසුන් ඇගයීමට පාත්‍ර කිරිමට ඉඩ ප්‍රස්ථා සලසන පාසල පදනම් කරගත් ඇගයීම් ක්‍රමයයි.

යථෝක්ත අරමුණ සහිතව ක්‍රියා කරන ගුරුවරුන් විසින් තම ඉගැන්නුම් ක්‍රියාවලියත් සිසුන්ගේ ඉගෙනුම් ක්‍රියාවලියත් වඩාත් කාර්යක්ෂම කිරීම පිණිස වඩා හොඳ කාර්යක්ෂමතාවෙන් යුක්ත ඉගෙනුම්, ඉගැන්නුම් සහ ඇගයීම් ක්‍රම යොදා ගත යුතු වෙයි. මේ සම්බන්ධයෙන් සිසුන්ට සහ ගුරුවරුන්ට යොදා ගත හැකි ප්‍රවේශ පිළිබඳ ප්‍රභේද කිහිපයක් මතු දැක්වෙයි. මේවා බොහෝ කලක සිට ගුරුවරුන් වෙත විභාග දෙපාර්තමේන්තුව විසින් ද ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය විසින් ද තොරතුරු සම්පාදනය කරන ලද ක්‍රමවේද වෙයි. එහෙයින් ඒවා සම්බන්ධයෙන් පාසල් පද්ධතියේ ගුරුවරුන් හොඳින් දැනුවත් වී ඇතැයි අපේක්ෂා කෙරේ. එම ප්‍රභේද මෙසේය.

01.	පැවරුම්	02.	ව්‍යාපෘති
03.	සමීක්ෂණ	04.	ගවේෂණ
05.	නිරීක්ෂණ	06.	ප්‍රදර්ශන /ඉදිරිපත් කිරීම
07.	ක්ෂේත්‍ර චාරිකා	08.	කෙටි ලිඛිත පරීක්ෂණ
09.	ව්‍යුහගත රචනා	10.	විවෘත ග්‍රන්ථ පරීක්ෂණ
11.	නිර්මාණාත්මක ක්‍රියාකාරකම්	12.	ශ්‍රවණ පරීක්ෂණ
13.	ප්‍රායෝගික ක්‍රියාකාරකම්	14.	කථනය
15.	ස්ව නිර්මාණ	16.	කණ්ඩායම් ක්‍රියාකාරකම්
17.	සංකල්ප සිතියම්	18.	ද්විත්ව සටහන් ජර්නල
19.	බිත්ති පුවත්පත	20.	ප්‍රශ්න විචාරාත්මක වැඩ සටහන්
21.	ප්‍රශ්න හා පිළිතුරු පොත්	22.	විවාද
23.	සාකච්ඡා මණ්ඩල	24.	සම්මන්ත්‍රණ
25.	ක්ෂණික කථා	26.	භූමිකා රංගන

හඳුන්වා දී ඇති මෙම ඉගෙනුම්, ඉගැන්නුම් සහ ඇගයීම් ක්‍රම සෑම එකක් ම සෑම විෂයයක් සම්බන්ධයෙන් සෑම විෂයය ඒකකයකට ම යොදා ගත යුතු යැයි අපේක්ෂා නොකෙරෙයි. තම විෂයයට, විෂය ඒකකයට ගැළපෙන ප්‍රභේදයක් තෝරා ගැනීමට ගුරුවරුන් දැනුවත් විය යුතුය; වග බලා ගත යුතුය.

මෙම ගුරු මාර්ගෝපදේශ සංග්‍රහවල ගුරුවරුන්ට තම සිසුන්ගේ ඉගෙනුම් ප්‍රගතිය තක්සේරු කිරිම සඳහා යොදාගත හැකි ඉගෙනුම් - ඉගැන්නුම් හා ඇගයීම් ප්‍රභේද පිළිබඳ සඳහනක් තිබේ. ඒවා ගුරුවරුන් විසින් සුදුසු පරිදි තම පන්තියේ සිසුන්ගේ ප්‍රගතිය තක්සේරු කිරිම පිණිස යොදාගත යුතු වෙයි. ඒවා භාවිත නොකොට මග හැරීම සිසුන්ට තම ශාස්ත්‍රීය හැකියා මෙන්ම ආවේදනික ගති ලක්ෂණත් මනෝචාලක දක්ෂතාත් පිළිබඳ වර්ධනයක් ළඟා කර ගැනීමත් ප්‍රදර්ශනය කිරීමත් පිළිබඳ අඩුපාඩු ඇති කරවයි.

13 වන ශ්‍රේණිය - ගණිතය (පළමුවැනි වාරය)

උපකරණ අංකය 01

3.1 නිපුණතා මට්ටම:

3.1 ගණන් කිරීම සඳහා විවිධ ක්‍රම භාවිත කරයි.

3.2 කණ්ඩායම් පැවරුමේ ස්වභාවය:

සංකරණ හා ගණන් කිරීමේ මූලධර්ම අනාවරණය කර ගැනීම සඳහා කරනු ලබන ගවේෂණයකි.

3.3 ගුරුවරයාට උපදෙස්:

1. සංකරණ හා සංයෝජන පාඩම ඉගැන්වීම ඇරඹීමට සතියකට පමණ පෙර මෙම ගවේෂණයේ යෙදීමට සිසුන් යොමු කරන්න.
2. පාඩම ඇරඹීමට යොදා ගත් දිනයට දින 2 කට පමණ පෙර, ගවේෂණයේ ප්‍රතිඵල ඉදිරිපත් කිරීමට උපදෙස් දෙන්න.
3. ගවේෂණයේ ප්‍රතිඵල අගයන්න.
4. ශිෂ්‍යයින් සංකරණ පිළිබඳ ව දැන සිටින මට්ටමේ සිට, නියමිත දිනයේ දී සංකරණ හා සංයෝජන පාඩම ආරම්භ කරන්න.

සටහන: ගණන් කිරීමේ මූලධර්මය සංකරණ හා සංයෝජන ක්‍රමාරෝපිත අංකනය යෙදීම් සිසුන්ට ප්‍රකාශ කළ යුත්තේ ගුරුවරයා පාඩම ආරම්භ කළ පසුව ය.

3.4 කාර්ය පත්‍රිකාව:

පහත සඳහන් සංසිද්ධිය සලකා බලන්න.

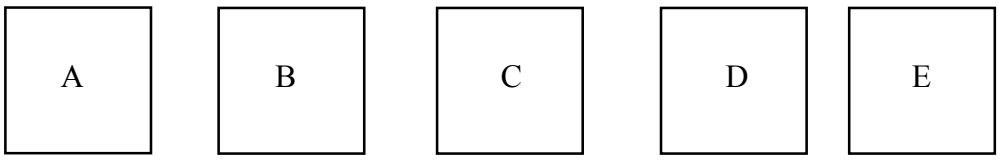
මෙය මීට වසර 100 කට පමණ පෙර සිදු වූවකි.

එක්තරා පාසලක සිසුන් 10 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත එක ම කණ්ඩායමක්, පාසල් විවේක කාලයේ දී තේ පැන් පානය සඳහා සෑම දිනක ම එකම ආපන ශාලාවට ගොස්, එක පෙළට ඇති එක ම පුටු 10යේ හිඳ ගනිති. දිනක් ආපනශාලා හිමිකරු මෙවැනි යෝජනාවක් ඉදිරිපත් කළේ ය.

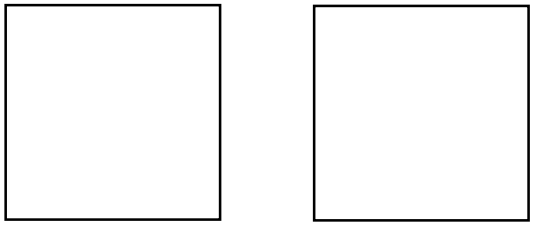
" ඔය ළමයි 10 දෙනා, ඔය පුටු දහයෙ අද ඉඳගත් පිළිවෙළට වෙනස් පිළිවෙළකට හෙට ඉඳ ගන්න. ඊ ළඟ දවසෙ තවත් පිළිවෙළට ඉඳ ගන්න. ඔය ආකාරයෙන් සියලු ම වෙනස් පිළිවෙළවල් අවසාන වූ දිනයේ සිට මම ඔය ළමයින්ට නොමිළයේ කෑම බීම ඕන තරමක් දෙනවා"

ආපනශාලා හිමිකරුගේ මේ ප්‍රකාශය පිළිබඳ ව ගණිතානුකූලව විමසා බැලීමක් කිරීම සඳහා පහත දැක්වෙන ක්‍රියාකාරකම්වල නිරත වන්න.

1. පහත දැක්වෙන ආකාරයට, සමාන, සමචතුරස්‍රාකාර ඝන කඩදාසි (කාඩ්බෝඩ්) කැබලි 5 ක් ගෙන, ඒවායේ A, B, C, D, E යන අකුරු ලියා ගන්න.



(ii) 1 හි සඳහන් ආකාරයට සමචතුරස්‍රයක ප්‍රමාණයට වඩා මඳක් විශාල සමචතුරස්‍ර 2ක් කඩදාසියක එක පෙළට ඇඳ ගන්න.



ඉහත A හා B යොදා සමචතුරස්‍ර දෙක කඩදාසිය මත වූ සමචතුරස්‍රයක් තුළ එක බැගින් වෙනස් ආකාර කිහිපයකට තැබිය හැකිදැයි බලන්න.

කඩදාසියක් මත එක පෙළට ඉහත පරිදි

(ii) සමචතුරස්‍ර 3 ක් ඇඳ, A, B, C යොදා කඩදාසි කැබලි තුන යොදා ගෙන,

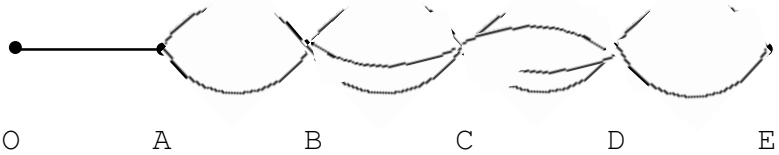
(iii) සමචතුරස්‍ර 4 ක් ඇඳ, A, B, C, D යෙදූ කඩදාසි කැබලි 4 යොදා ගෙන,

(iv) සමචතුරස්‍ර 5 ක් ඇඳ, A, B, C, D, E යෙදූ කඩදාසි කැබලි 5 ම යොදා ගෙන

එක සමචතුරස්‍රයක් තුළ එක බැගින් ඒවා තිබිය හැකි වෙනස් ආකාර සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ඉහත එක් එක් අවස්ථාවේ දී ලද ප්‍රතිඵල කඩදාසියක සටහන් කර ගන්න.

2. O නම් නගරයකට A, B, C, D, E යන නගර 5 සම්බන්ධ කරන මාර්ග පද්ධති ජාලය පහත පරිදි වේ.



(a) O සිට; (i) A ට (ii) B ට (iii) C ට (iv) D ට (v) E ට යා හැකි වෙනස් ආකාර කීයක් තිබේ ද?

(b) එම ප්‍රතිඵල පහසුවෙන් ලබා ගත හැකි ආකාරය විස්තර කරන්න.

(c) එම ප්‍රතිඵල හා ඉහත (i) වැනි ක්‍රියාකාරකමෙහි දී ලද ප්‍රතිඵල අතර සම්බන්ධයක් තිබේ නම්, එසේ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කරන්න.

3. වෙනස් ද්‍රව්‍ය (සජීවී හෝ අජීවී වස්තු හෝ සංකේත)

(a) 10 ක් එක පෙළට තැබිය හැකි වෙනස් ආකාර සංඛ්‍යාව ලබා දෙන, නිඛිලවල ගුණිතයක් ලෙස ඇති ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.

එම ප්‍රකාශනය සුළු කර බලන්න. එනයින්, ආරම්භයේ දී සඳහන් කර ඇති, ආපනශාලා හිමිකරුගේ ප්‍රකාශනය පිළිබඳ ඔබේ විනිශ්චය ලියා දක්වන්න.

(b) වෙනස් ද්‍රව්‍ය n සංඛ්‍යාවක් එක පෙළට පිළියෙළ කළ හැකි වෙනස් ආකාර සංඛ්‍යාව සඳහා ප්‍රකාශනයක්, ගුණිතයක් ලෙස ලියා දක්වන්න.

ඇගයීම සඳහා නිර්ණායකඃ

1. දී ඇති උපදෙස්වලට අනුව කාර්යයෙහි නිරත වීම.
2. ගණිතමය සම්බන්ධතා අනාවරණය කිරීම.
3. ගණිතමය ආකෘති ගොඩ නැගීම.
4. නිගමනවලට එළඹීම.

4.6 නිර්ණායක සඳහා ලකුණු ප්‍රදානය:

1.	ඉතා හොඳයි	-	ලකුණු 4 යි
2.	හොඳයි	-	ලකුණු 3 යි
3.	තරමක් හොඳයි	-	ලකුණු 2 යි
4.	සාමාන්‍යයයි	-	ලකුණු 1 යි

4.7 මෙම උපකරණය සඳහා උපයා ගත හැකි උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණය

ලකුණු $5 \times 4 = 20$

13 වන ශ්‍රේණිය - ගණිතය (පළමුවැනි වාරය)

උපකරණ අංකය 02

4.1 නිපුණතා මට්ටම:

4.1 සසම්භාවී පරීක්ෂණයක සිද්ධි විවරණය කරයි.

4.2 අහඹු සිදුවීම් පිළිබඳ ගැටලු විසඳීම සඳහා සම්භාවිතාව පිළිබඳ ආකෘති යොදා ගනියි.

4.2 උපකරණයේ ස්වභාවය:

පොත් පත් ඇසුරින් කුලක හා සම්භාවිතාව පිළිබඳ පෙර දැනුම පුණරීක්ෂණය කිරීමේ විවෘත ග්‍රන්ථ නිරීක්ෂණයකි.

4.3 උපකරණය ක්‍රියාත්මක කිරීම සඳහා ගුරුවරයාට උපදෙස්:

1. සම්භාවිතාව පාඩම ඉගැන්වීමට සති 2කට පමණ පෙර 6-11 ශ්‍රේණි දක්වා ගණිතය පෙළ පොත්වල කුලක සහ සම්භාවිතාව පාඩම් අධ්‍යයනය කිරීමට උපදෙස් දෙන්න. දී ඇති පැවරුම සිසුන්ට ඉදිරිපත් කරන්න.
2. සම්භාවිතාව පාඩම ඉගැන්වීමට සතියකට පමණ පෙර පිළිතුරු ඉදිරිපත් කිරීමට උපදෙස් දෙන්න.
3. සිසුන් දී ඇති පිළිතුරු ඇගයීමෙන් පසු සිසුනට අවශ්‍ය ප්‍රතිපෝෂණ ලබා දෙමින් සම්භාවිතාව පාඩම ඉගැන්වීම අරඹන්න.

4.4 ගුණාත්මක යෙදවුම් (අවශ්‍ය උපකරණ): කාර්ය පත්‍රිකාවේ පිටපත්

4.5 කාර්ය පත්‍රිකාව

1. (i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ කුලකයේ උපකුලක සියල්ල ම ලියන්න. එහි උපකුලක කීයක් තිබේ ද?

   (ii) $B = \{x / x \in Z^+, x < 10\}$ යන කුලකයේ පහත සඳහන් කුලකවලින් කවර ඒවා උපකුලක දැයි තෝරන්න.

   $P = \{1, 4, 9, 16\}$ $Q = \{2, 3, 5, 7\}$

   $R = \{10$ ට අඩු ප්‍රථමක සංඛ්‍යා$\}$ $S = \{10$ ට අඩු ගණිත සංඛ්‍යා$\}$

   $T = \{2, 4, 6, 8\}$ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   ඔබ තෝරා ගත් උපකුලකවලින් A හි නියම උපකුලක තිබේ නම් ලියන්න.

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ හා $\varepsilon = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   (i) $A \cap B$ (ii) $A \cup B$ (iii) A' (iv) B' (v) $A' \cap B'$

   (vi) $A' \cup B'$ (vii) $(A \cap B)'$ (viii) $A \cap B'$ (ix) $(A \cup B)'$

   (x) $A' \cap B$

   කුලකවල අවයව ලියා දක්වන්න.

3. කුලක වීජීය පිළිබඳ පහත දී ඇති නියම ප්‍රකාශ කර වෙන් සටහන් මගින් පැහැදිලි කරන්න.

(i) න්‍යායදේශ නියමය (ii) විසටන නියමය

(iii) සංසටන නියමය (iv) ද මෝගන් නියමය

4. පහත සඳහන ප්‍රතිඵලවලින් සත්‍ය ප්‍රතිඵල තෝරා නැවත ලියන්න.

(i) $A \cap \phi = A$ (ii) $A \cup \phi = A$ (iii) $\varepsilon \cap \phi = A$

(iv) $A' \cup A = A,\ A' \cap A = \phi$

5. (i) සසම්භාවී පරීක්ෂණය අර්ථකථනය කරන්න.

(ii) පහත සඳහන් පරීක්ෂණවලින් සසම්භාවී පරීක්ෂණ තෝරන්න.

- කාසියක් උඩ දමා මතු පිටට වැටෙන පැත්ත පරීක්ෂා කිරීම.
- පැතිවල 1-6 දක්වා අංක යොදා සණාකාර දාදු කැටයක් උඩ දමා මතු පිටට වැටෙන පැත්ත පරීක්ෂා කිරීම.
- පාසල් කාලය තුළ දී අසනීප වී ගෙදර යවන සිසුන් ගණන පරීක්ෂා කිරීම.
- විදුලි බුබුලක ජීවිත කාලය මැනීම.
- රතු පාට බෝල 3 ක් හා නිල් පාට බෝලයක් ඇති මල්ලෙන් අහඹු ලෙස බෝලයක් ගැනීම.

(iii) ඔබ ඉහත තෝරා ගත් සසම්භාවී පරීක්ෂණවල නියැදි අවකාශ ලියන්න.

6. කාසි දෙකක් එකවර උඩ දමා මතු පිටට වැටෙන පැත්ත නිරීක්ෂණය කිරීම යන සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ

(i) නියැදි අවකාශය ලියන්න.

(ii) එහි සරල සිද්ධි දෙකක් ලියන්න.

(iii) සංයුක්ත සිද්ධි දෙකක් ලියන්න.

7. අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි යනු කුමක් ද? උදාහරණයක් මගින් පැහැදිලි කරන්න.

8. කාසියක් 50 වරක් උඩ දමා වැටෙන පැත්ත නිරීක්ෂණය කර පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

වාරය	වැටුණ පැත්ත (සිරස හෝ අගය)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
.	
.	
.	
50	

(i) කාසියක් 25 වරක් උඩ දැමීමේ දී හිස ලැබීමේ සාර්ථක භාගය සොයන්න.

(ii) ඉහත පරීක්ෂණයේ 50 වරක්, 100 වරක් සිදුකර හිස ලැබීමේ සාර්ථක භාගය සොයන්න.

(iii) සාර්ථක භාගය, සම්භාවිතාව සෙවීම සඳහා මිනුමක් ලෙස ගැනීමට නම් පරීක්ෂණය කරන වාර ගණන කෙසේ විය යුතු ද?

9. සමසේ භව්‍ය සිද්ධියක් යනු කුමක් ද? පහත සඳහන් සසම්භාවී පරීක්ෂණවල සමසේ භව්‍ය සිද්ධි ලැබෙන පරීක්ෂණ තෝරා ලියන්න.

(i) කාසියක් උඩ දමා මතු පිට වැටෙන පැත්ත නිරීක්ෂණය කිරීම.

(ii) 1-6 දක්වා අංක යෙදූ සාධාරණ දාදු කැටයක් උඩ දමා මතු පිටට වැටෙන පැත්ත නිරීක්ෂණය කිරීම.

(iii) නිල් බෝල 2 ක් හා රතු බෝල 3 ක් ඇති මල්ලකින් අහඹු ලෙස බෝලයක් ගෙන පාට නිරීක්ෂණය කිරීම.

(iv) 1-9 දක්වා අංක ලියා ඇති සමාන හැඩැති කාඩ්පත් අතුරින් එකක් අහඹු ලෙස තෝරා අංකය සටහන් කිරීම.

10. ඉහත ගැටලුවේ (ii) කොටසේ සසම්භාවී පරීක්ෂණය සඳහා

(i) නියැදි අවකාශය ලියන්න.

(ii) $A = \{$ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීම$\}$ $B = \{$ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් ලැබීම$\}$

$C = \{$හතරැස් සංඛ්‍යාවක් ලැබීම$\}$ $D = \{$ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම$\}$

ලෙස ගෙන

a. $P(A)$ b. $P(B)$ c. $P(C)$ d. $P(D)$

e. $P(A \cap B)$ f. $P(B \cap C)$ g. $P(C \cap A)$ h. $P(A \cup B)$

i. $P(A \cup B \cup C)$ j. $P(A \cap B \cap C)$

ගණනය කරන්න.

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(A \cap B)$ බව ද

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$

$- P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ බව ද සාධනය කරන්න.

(iv) a. අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි දෙකක් තෝරන්න.

b. $P(A \cup D)$ සොයන්න.

තක්සේරුව සඳහා නිර්ණායකඃ

1. අවශ්‍ය දැනුම ලබා ගැනීම සඳහා පොත්පත් පරිශීලනය කිරීම.
2. කුලක වීජීය පිළිබඳ අවබෝධය ප්‍රදර්ශනය කිරීම.
3. සම්භාවිතාව මූලික සංකල්ප පිළිබඳ අවබෝධය ප්‍රදර්ශනය කිරීම.
4. දී ඇති උපදෙස් නිවැරදි ව පිළිපැදීම.
5. නිරවුල් ව අදහස් ප්‍රකාශ කිරීම.

4.6 නිර්ණායක සඳහා ලකුණු ප්‍රදානය:

1.	ඉතා හොඳයි	-	ලකුණු 4 යි
2.	හොඳයි	-	ලකුණු 3 යි
3.	තරමක් හොඳයි	-	ලකුණු 2 යි
4.	සාමාන්‍යයයි	-	ලකුණු 1 යි

4.7 මෙම උපකරණය සඳහා උපයා ගත හැකි උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණය

ලකුණු $5 \times 4 = 20$

ගුරුවරයාට ලිඛිත පරීක්ෂණය සඳහා පහත සඳහන් ප්‍රශ්න තෝරා ගත හැකි අතර නැතහොත් ඔහුගේ/ඇයගේ අභිහමතය පරිදි ප්‍රශ්න සකස් කළ හැකි ය.

සංකරණ හා සංයෝජන

1. (a) පිරිමි ළමයි තිදෙනෙකු හා ගැහැණු ළමයි තිදෙනෙකු ආසන හයක් ඇති පේළියක වාඩි වෙයි.

   (i) ඔවුනට ආසනවල වාඩි විය හැකි

   (ii) ගැහැණු ළමයි තිදෙනා එක්ව සිටින සේ වාඩි විය හැකි

   (iii) ගැහැණු හා පිරිමි මාරුවෙන් මාරුවට වන සේ වාඩි විය හැකි

   ආකාර ගණන සොයන්න.

   (b) එක්තරා විභාගයක දී ප්‍රශ්න 9කින් 6කට පළිතුරු සැපයිය යුතු ය. ප්‍රශ්න තේරාගත හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

   (i) පළමු ප්‍රශ්න තුන අනාවාර්ය නම්

   (ii) පළමු ප්‍රශ්න පහෙන් අඩු වශයෙන් ප්‍රශ්න හතරක්වත් තෝරාගත යුතු නම්

   ප්‍රශ්න හය තෝරාගත යුතු ආකාර ගණන ද සොයන්න.

2. (a) කොමිටියක් ගණිත ගුරුවරු තිදෙනෙක්ගෙන් හා ජීව විද්‍යා ගුරුවරු තිදෙනෙක්ගෙන් යුක්ත වේ.

   (i) ඔවුනට ඕනෑ ම අනුපිළිවෙළකට වාඩි විය හැකි නම්

   (ii) එක ම විෂය උගන්වන ගුරුවරු එක ළඟ වාඩි විය යුතු නම්

   (iii) එක ම විෂය උගන්වන ගුරුවරු දෙදෙනෙක් එක ළඟ වාඩි නොවිය යුතු නම්

   (iv) එක ම විෂය උගන්වන ගුරුවරු එක ළඟ වාඩි විය යුතු අතර එක්තරා ගණිත ගුරුවරයකු සෑම විට ම ජීවවිද්‍යාව උගන්වන ඔහුගේ බිරිඳ අසලින් වාඩිවිය යුතු නම්

   ඔවුනට පේළියක වාඩිවිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

   (b) පාද n ඇති සවිධි බහුඅස්‍රයක් සලකන්න.

   (i) බහුඅස්‍රයේ විකර්ණ කොපමණ තිබේ ද?

   පාද ගණන, විකර්ණ ගණන මෙන් දෙගුණයක් නම් n, හි අගය කොපමණ ද?

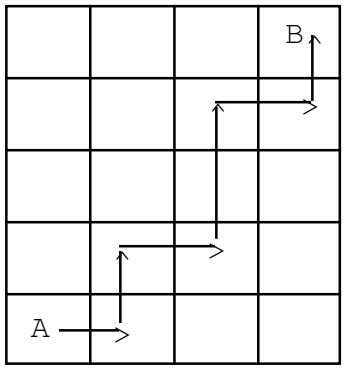
   (ii) බහුඅස්‍රයේ ශීර්ෂ, ශීර්ෂ වන සේ ත්‍රිකෝණ කොපමණ තිබේ ද?

   (iii) ඉහත (ii) හි ත්‍රිකෝණ අතුරින් කොපමණක හරියට ම එක් පාදයක්, බහුඅස්‍රයේ පාදයක් වන සේ පවතී ද?

   (iv) ඉහත (ii) හි ත්‍රිකෝණ අතුරින් කොපමණක පාද දෙකක්, බහුඅස්‍රයේ පාද දෙකක් සමග සමපාත වේ ද?

$n > 3$, නම් ශීර්ෂ, බහුඅස්‍රයේ ශීර්ෂ වන සේ ද පාද බහුඅස්‍රයේ විකර්ණ වනසේ ද ඇති ත්‍රිකෝණ ගණන $\frac{n}{6}(n-4)(n-5)$ බව අපෝහනය කරන්න.

3 (a) ඍජුකෝණාස්‍රාකාර කොරිඩෝවක පිඟන් ගඩොල් 20ක් රූපයේ පරිදි අල්ලා ඇත. කුඩා දැරියක් A පිඟන් ගඩොලේ සිට B පිඟන් ගඩොල දක්වා පැන යන සේ එක් පිඟන් ගඩොලක සිට යාබද ව ඉදිරියෙන් ඇති පිඟන් ගඩොලට හෝ යාබදව දකුණින් ඇති පිඟන් ගඩොලට පනිමිනි. (එසේ කළ හැකි එක් ආකාරයක් රූපයේ දකවා ඇත). ඇයට කොපමණ ආකාරයකට මෙය කල හැකි ද ?



(b) එක් සමූහයක් ගැහැණු ළමයි තිදෙනෙක්ගෙන් හා පිරිමි ළමයි දෙදෙනෙක්ගෙන් සමන්විත වේ. දෙවන සමූහයක් ගැහැණු ළමයි දෙදෙනෙක්ගෙන් හා පිරිමි ළමයි තිදෙනෙකුගෙන් සමන්විත වේ. තුන්වන සමූහයත් ගැහැණු ළමයෙක්ගෙන් හා පිරිමි ළමයි හතර දෙනෙකුගෙන් සමන්විත වේ. වැඩි ම වශයෙන් එක් සමූහයකින් දෙදෙනෙකු වන සේ ළමයි තිදෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමක් සසම්භාවී ව තෝරා ගනී. කණ්ඩායමේ සැමවිට ම එක් ගැහැණු ළමයකු හා පිරිමි ළමයි තිදෙනෙකු වන සේ කණ්ඩායම් තෝරාගත හැකි ආකාර ගණන කොපමණ ද?

ව්‍යුත්පන්නය II

1 (a) වතුර ටැංකියක හැඩය ඍජු වෘත්තාකර කේතුවක ඡින්නයක ආකාරය ගනී. ටැංකියේ උස $5m$ ද ඉහළ කෙළවරේ හා පතුලේ අරයන් පිළිවෙලින් 2 m හා 1 m ද වේ. ටැංකියට මිනිතතුවට ඝන මීටර 0.7ක නියත සීඝ්‍රතාවයෙන් ජලය පුරවයි. ආරම්භයේදී ටැංකිය හිස් ව තිබුණි. ජල මට්ටම පතුලේ සිට x m $(0 < x < 5)$, වන විට ටැංකියේ ඇති ජල පරිමාව ඝනමීටර $\frac{\pi}{75}(x^3 + 15x^2 + 75x)$ බව පෙන්වන්න. $x = 2$ වන විට ජල මට්ටම ඉහළ නගින සීඝ්‍රතාවය සොයන්න.

(b) c හා d නියත වූ $f(x) = x^3 - 2x^2 + cx + d$, ශ්‍රිතය සලකමු. $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය (1, 4) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර එම ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකය x අක්ෂයට සමාන්තර වේ. c හා d හි අගයන් සොයන්න.

(i) y වැඩි වන, x හි පරාසය ද

(ii) y අඩු වන, x හි පරාසය ද

(iii) ප්‍රස්තාරයේ උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද

සොයන්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය දළ සටහනක දක්වන්න.

2 (a) ජනේලයක හැඩය, සෘජුකෝණාස්‍රයක් හා එය මත ඇති අර්ධ වෘත්තයක ආකාරය ගනී. ජනේලයේ පරිමිතිය 20 m කි. ජනේලයේ වර්ගඵලය උපරිම වන පරිදි එහි මාන සොයන්න.

(b) $y=\dfrac{3x^2-3}{6x-10}$. හි උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍ය සොයන්න. $y=\dfrac{3x^2-3}{6x-10}$ හි ප්‍රස්තාරය දළ සටහන් කරන්න. $xy=1$ හි ප්‍රස්තාරය ද එම සටහනේ ම අඳින්න. එනයින් $3x^2-9x+10=0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල එකක් පමණක් ඇති බව ද එම මූලය -1 ට අඩු බව ද පෙන්වන්න.

අනුකලනය

1 (a) $\dfrac{1}{x(2x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{2x-1}+\dfrac{C}{(2x-1)^2}$ වන සේ A, B සහ C නියත සොයන්න.

එනයින් $\int \dfrac{1}{x(2x-1)^2}dx$ සොයන්න.

(b) $\int_0^2 x(2-x)^8 dx$ ඇගයීමට සුදුසු ආදේශයන් යොදන්න. [ඉඟිය : $u=x-2$ යැයි යොදන්න]

(c) $\sin 3x \sin x$ යන්න k(ඝනC−ඝනD) ආකාරයට දක්වන්න. මෙහි k යනු නියතයකි. එනයින් $\int \sin 3x.\sin x\, dx$ සොයන්න.

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x}{3+5\cos x}dx$ අගයන්න. [ඉඟිය : $3+5$ ඝනx $=u$ යැයි යොදන්න.]

2 (a) $\dfrac{1+x^2}{x(1-x)}=A+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{1-x}$ වන සේ A, B සහ C නියත සොයන්න. එනයින් $\int_2^3 \dfrac{1+x^2}{x(1-x)}dx=\ln\dfrac{3}{8}-1$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\int \cos^{10} x.\sin^3 x dx$ සෙවීමට සුදුසු පරිණාමනයක් යොදන්න. [ඉඟිය: $u=$ ඝන x යැයි යොදන්න.]

(c) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ බව පෙන්වන්න. එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් $\int \cos^4 x.dx$ සොයන්න.

3. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1}$ යැයි ගනිමු.

$\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ වන සේ A, B, C සහ D නියත සොයන්න. එනයින් $\int \dfrac{1}{x^4-1}dx$ සොයන්න.

(b) $\cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1,$ යන සර්වසාම්‍යය භාවිත කර $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\cos x}dx$ අගයන්න.

$x = \dfrac{\pi}{2} - y,$ ආදේශ කර $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\sin x}dx = I$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$ ඇගයීමට සුදුසු ආදේශයක් යොදන්න. [ඉඟිය: $x + \cos x = u$ යැයි යොදන්න.)

13 වන ශ්‍රේණිය - ගණිතය (දෙවැනි වාරය)

උපකරණ අංකය 01

1.1 නිපුණතා මට්ටම: 13.12 කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් අනුකලන ගැටලු විසඳයි.

1.2 උපකරණයේ ස්වභාවය: කොටස් වශයෙන් අනුකලන සූත්‍රය ලබා ගැනීම හා භාවිතය සඳහා වූ කේවල පැවරුමකි.

1.3 උපකරණය ක්‍රියාත්මක කිරීම සඳහා ගුරුවරයාට උපදෙස්:

1. දී ඇති කාර්යය පත්‍රිකාව සිසුන්ට ලබා දී සිසුන් කාර්යයෙහි යොදවන්න.
2. සූත්‍රය පුනරාවර්තව යෙදීමෙන් හෝ ශිල්පීය ක්‍රම මගින් ගැටලුවෙහි අවසාන පිළිතුර ලබා ගැනීමට සිසුන් යොමු කරවන්න.
3. පැවරුම ඇගයීමෙන් පසු අවශ්‍ය ප්‍රතිපෝෂණ ලබා දෙන්න.

1.4 ගුණාත්මක යෙදවුම් (අවශ්‍ය උපකරණ): කාර්ය පත්‍රිකාවෙ පිටපත්

1.5 කාර්ය පත්‍රිකාව:

පහත දැක්වෙන උපදෙස් අනුගමනය කරමින් කාර්යය කිරීමට ඔබට පැවරේ.

1. u හා v යනු x හි අවකල්‍ය ශ්‍රිත වන විට, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ බව දනිමු. ශ්‍රිතයක ප්‍රතිව්‍යුත්පන්නයේ අර්ථ දැක්වීම අනුව $\int\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx$ අගයන්න.

   අනුකලනය පිළිබඳ නියම භාවිතයෙන්, $\int u\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = uv - \int v\left(\frac{du}{dx}\right)dx + c$ බව ලබා ගන්න.

2. ඉහත ඔබ ලබා ගත් ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අනුකල අගයන්න.

   (i) $\int x\sin x dx$; මෙහි $u = x$, $\frac{dv}{dx} = \sin x$ ලෙස ගන්න.

   (ii) $\int x^2\cos x dx$; මෙහි $u = x^2$, $\frac{dv}{dx} = \cos x$ ලෙස ගන්න.

   (iii) $\int e^x\sin x dx$; මෙහි $u = e^x$, $\frac{dv}{dx} = \sin x$ ලෙස හෝ $u = \sin x$, $\frac{dv}{dx} = e^x$ ලෙස යොදා ගන්න.

   (iv) $\int \ln x dx$; මෙහි $u = \ln x$, $\frac{dv}{dx} = 1$ ලෙස යොදා ගන්න.

1.6 තක්සේරුව සඳහා නිර්ණායකඃ

1. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය පිළිබඳ සූත්‍රය ලබා ගැනීම
2. එකී සූත්‍රය භාවිතය
3. ප්‍රතිව්‍යුත්පන්න ලෙස අදාළ ශ්‍රිතවල අනුකල ලබා ගැනීම
4. අවසාන ප්‍රතිඵල ලබා ගැනීම
5. දී ඇති උපදෙස් පිළිපැදීම

1.7 නිර්ණායක සඳහා ලකුණු ප්‍රදානයඃ

1.	ඉතා හොඳයි	-	ලකුණු 4 යි
2.	හොඳයි	-	ලකුණු 3 යි
3.	තරමක් හොඳයි	-	ලකුණු 2 යි
4.	සංවර්ධනය විය යුතු යි	-	ලකුණු 1 යි

1.8 මෙම උපකරණය සඳහා උපයා ගත හැකි උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණය

ලකුණු $4 \times 5 = 20$

උපකරණ අංකය 02

2.1 නිපුණතා මට්ටම:

5.7 සන්තතික විචල්‍යයක සහ විවික්ත විචල්‍යයක සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිවල ලක්ෂණ විශ්ලේෂණය කරයි.

5.8 සසම්භාවී විචල්‍යයක ගණිතමය අපේක්ෂාව විවරණය කරයි.

2.2 උපකරණයේ ස්වභාවය:

සසම්භාවී විචල්‍යයක, සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය, මධ්‍යන්‍යය විචලතාව සහ සූර්ණ සෙවීම සඳහා වූ කේවල පැවරුමක්.

2.3 උපකරණය ක්‍රියාත්මක කිරීම සඳහා ගුරුවරයාට උපදෙස්:

1. සම්භාවිතා ව්‍යාප්ති පාඩමෙන් පසු එම සංකල්ප තහවුරු වී ඇත්දැයි පරීක්ෂා කිරීම සඳහා මෙම පැවරුම සිසුනට දී කාර්යයෙහි යොදවන්න.
2. පැවරුම ඇගයීමෙන් පසු, අවශ්‍ය ප්‍රතිපෝෂණ ලබා දෙන්න.

2.4 ගුණාත්මක යෙදවුම් (අවශ්‍ය උපකරණ): කාර්ය පත්‍රිකාවේ පිටපත්

2.5 කාර්ය පත්‍රිකාව:

1. පහත දැක්වෙන උපදෙස් අනුගමනය කරමින් කාර්යය කිරීමට ඔබට පැවරේ.

(i) X නම් විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය අර්ථ දක්වා, එහි විශේෂ ලක්ෂණ සඳහන් කරන්න.

(ii) X හි මධ්‍යන්‍යය μ [අපේක්ෂිත අගය හෙවත් $E(X)$] අර්ථ දක්වන්න.

(iii) X නම් විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ව්‍යාප්තය පහත දී ඇත.

X	-1	0	1
$P(X)$	k^2	$-\frac{k}{2}$	$\frac{1}{2}$

k ට ගත හැකි අගය සොයන්න.

(iv) $E(X)$ සොයන්න.

(v) $2x+1$ හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ලියා දක්වන්න.

(vi) ඉහත (v) හි ව්‍යාප්තිය ඇසුරෙන් $E(2x+1)$ සොයන්න.

(vii) $E(2x+1) = 2E(x)+1$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(viii) X^2 හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ලියා දක්වන්න.

(ix) ඉහත (viii) හි ව්‍යාප්තිය ඇසුරෙන් $E(X^2)$ සොයන්න.

(x) $Var(X)$ අර්ථ දක්වන්න.

(xi) එම අර්ථ දැක්වීම භාවිත කර $Var(X)$ සොයන්න.

(xii) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(xiii) සසම්භාවී විචල්‍යයක මූල ලක්ෂ්‍යය වටා පළමුවැනි ඝූර්ණය යනු කුමක්දැයි හඳුන්වා දෙන්න.

(xiv) සසම්භාවී විචල්‍යයක මධ්‍යන්‍යය වටා දෙවැනි ඝූර්ණය වනුයේ කුමක් ද?

2. (i) X නම් සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය අර්ථ දක්වන්න. එහි විශේෂ ලක්ෂණ සඳහන් කරන්න.

(ii) X හි මධ්‍යන්‍යය μ [X හි අපේක්ෂිත අගය හෙවත් $E(X)$] අර්ථ දක්වන්න.

(iii) X නම් සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක, සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය පහත දැක්වේ.

$$f_X(x) = \begin{cases} kx \ ; & 1 \le x \le 3 \quad \text{විට} \\ 0 \ ; & 1 \le x \le 3 \quad \text{අනෙක් විට} \end{cases}$$

k හි විය හැකි අගය සොයන්න.

(iv) $E(X)$ සොයන්න.

(v) $2x+1$ හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

(vi) ඉහත (v) හි ශ්‍රිතය භාවිත කර, $E(2x+1)$ සොයන්න.

(vii) $E(2x+1) = 2E(x)+1$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(viii) X^2 හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

(ix) ඉහත (viii) හි ශ්‍රිතය භාවිත කර, $E(X^2)$ සොයන්න.

(x) $\mathrm{Var}(X)$ අර්ථ දක්වන්න.

(xi) ඉහත (X) හි අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $\mathrm{Var}(X)$ සොයන්න.

(xii) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(xiii) සසම්භාවී විචල්‍යයක මූල ලක්ෂ්‍යය වටා පළමුවැනි ඝූර්ණය යනු කුමක්දැයි හඳුන්වා දෙන්න.

(xiv) සසම්භාවී විචල්‍යයක මධ්‍යන්‍යය වටා දෙවැනි ඝූර්ණය වනුයේ කුමක් ද?

2.6 තක්සේරුව සඳහා නිර්ණායකඃ

1. අර්ථ දැක්වීම ප්‍රකාශ කිරීම.
2. සම්භාවිතා ව්‍යාප්තියක ලක්ෂණ භාවිත කිරීම.
3. සසම්භාවී විචල්‍යයක අපේක්ෂාව සහ විචලතාව සඳහා අර්ථ දැක්වීම් භාවිත කිරීම.
4. සසම්භාවී විචල්‍යයක් මත අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතයක අපේක්ෂාව සෙවීම.
5. දී ඇති ප්‍රතිඵලයක් සත්‍යාපනය කිරීම.

2.7 නිර්ණායක සඳහා ලකුණු ප්‍රදානයඃ

1.	ඉතා හොඳයි	-	ලකුණු 4 යි
2.	හොඳයි	-	ලකුණු 3 යි
3.	තරමක් හොඳයි	-	ලකුණු 2 යි
4.	සාමාන්‍යයයි	-	ලකුණු 1 යි

2.8 මෙම උපකරණය සඳහා උපයා ගත හැකි උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණයඃ

ලකුණු $5 \times 4 = 20$

ගුරුවරයාට ලිඛිත පරීක්ෂණය සඳහා පහත සඳහන් ප්‍රශ්න තෝරා ගත හැකි අතර නැතහොත් ඔහුගේ/ඇයගේ අභිමතය පරිදි ප්‍රශ්න සකස් කළ හැකි ය.

ද්විපද ප්‍රසාරණය

1. (a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^{15}$ ප්‍රසාරණයේ x^{32} හා x^{-17} හි සංගුණක සොයන්න.

   (b) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ හි x වල ආරෝහණ බලවලින් යුත් ප්‍රසාරණයේ x^2 හි සංගුණනය $\frac{7}{16}$ වේ. n ධන නිඛිලයකි.

   (i) n හි අගය සොයන්න.

   (ii) ප්‍රසාරණයේ x^3 හි සංගුණනය ගණනය කරන්න.

2. (a) x හි ආරෝහණ බලවලින් x^2 අඩංගු පැය දක්වා $(1 + ax)^8$ ප්‍රසාරණය කරන්න.

   $(1+ bx)$ $(1+ ax)^8$ හි ප්‍රසාරණයේ x සහ x^2 හි සංගුණන පිළිවෙලින් 0 සහ -36 වේ.

   $a > 0$ සහ $b < 0$ බව දී ඇති විට a සහ b හි අගයන් සොයන්න.

   (b) $\left(1+x+2x^3\right)\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$ හි x ගෙන් ස්වායත්ත පදය සොයන්න.

3. (a) x^3 සහ ඊට වැඩි x හි බල නොගිණිය හැකි තරම් x කුඩා නම්,

   $(3+2x)\left(3-\frac{x}{3}\right) \cong 3^8\left(9-3x-2x^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

   (b) $(1+ax)^5$ හි ප්‍රසාරණයේ x හි සංගුණකය $\left(9+\frac{x}{3}\right)^6$ හි ප්‍රසාරණයේ x^4 හි සංගුණකයට සමාන බව දී ඇතිනම්, a හි අගය ගණනය කරන්න.

ගුරුවරයාට ලිඛිත පරීක්ෂණය සඳහා පහත සඳහන් ප්‍රශ්න තෝරා ගත හැකි අතර නැතහොත් ඔහුගේ/ඇයගේ අභිමතය පරිදි ප්‍රශ්න සකස් කළ හැකි ය.

අනුකලනය

1 (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx$ ඇගැයීමට කොටස් වශයෙන් අනුකලනය කිරීම භාවිත කරන්න.

(b) $y = -(12 - 8x + x^2)$ සහ $y = x$ වනු මගින් වට වන වර්ගඵලය සොයන්න.

(c)

x	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	0.8	1.2	1.7	2.3	3.0

වගුවෙන් $f(x)$ ශ්‍රිතයක අගයන් දී ඇත.

(i) ප්‍රාන්තර 4ක් සඳහා ත්‍රිපීසාභ නීතිය

(ii) ප්‍රාන්තර 4ක් සඳහා සිම්සන් නීතිය

භාවිතයෙන් $\int_1^3 f(x)dx$ අගයන්න.

2 (a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$ බව පෙන්වන්න.

(b) $y^2 = 3x$ සහ $x^2 = 3y$ වක්‍ර (3,3) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බව සත්‍යාපනය කරන්න. මෙම වක්‍ර මගින් වට වන සීමිත පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

(c) $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$ අගයන්න.

ප්‍රාන්තර 4ක් සඳහා සිම්සන් නීතිය භාවිත කර $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

3 (a) $\int x \cdot e^{3x} dx$ සෙවීමට කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිත කරන්න.

(b) $y = x\ (3 - 4x)$ වක්‍රය සහ $y = x$ රේඛාව මගින් වට වන පරිමිත පෙදෙසේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

(c) සිම්සන් නීතිය භාවිතයෙන් $I = \int_0^4 \frac{dx}{1+x^2}$ අනුකලය ආසන්නව ඇගයීම සඳහා [0,4] ප්‍රාන්තර සමාන උප ප්‍රාන්තර අටක් භාවිත කරන්න.

මාපාංක අඩංගු අසමානතා

1 $-a < x < a$ නම් පමණක් $|x| < a$

$x < -a$ හෝ $x > a$ නම් පමණක් $|x| > a$ මෙහි $a > 0$

ඉහත අර්ථ දැක්වීම් භාවිත කර හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ පහත සඳහන් අසමානතා සපුරාලන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

(a) $|3-2x| < 5$ (b) $|2x+3| > 1$ (c) $|x-4| > 2x-2$

2 (a) $|x-2| - 2|2x-1| > 0$

(b) $x > |3x-8|$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

3 (a) $x + 2|x-1| > 2|x+1| - 3$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

(b) (i) $y = x^2 - x - 6$ සහ (ii) $y = |x^2 - x - 6|$ ප්‍රස්තාර එක ම සටහනක අඳින්න.

4 $y = |x^2 - 4x + 3|$ සහ $y = |x-1|$ ප්‍රස්තාර එක ම සටහනක අඳින්න.

එනයින් $|x^2 - 4x + 3| > |x-1|$ අසමානතාව විසඳන්න.

ශ්‍රේණි

1 (a) $\sum_{r=1}^{n} \log 2^r$ සොයන්න.

(b) $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ යැයි ගනිමු. $(1-x)S_n$ යන්න සලකා, S_n සොයන්න.

එනයින් $|x| < 1,$ වන විට $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ අපෝහණය කරන්න.

(c) $f(r) = \frac{1}{r^2}$ සහ $U_r = \frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$U_r = f(r) - f(r-1)$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\sum_{r=1}^{n} U_r$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී බව පෙන්වන්න.

$S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$. යැයි ගනිමු.

$S_n > \frac{9999}{10000}$ වන n හි අවම අගය සොයන්න.

සංඛ්‍යානය

1 (a) ඒකාකාර කැට දෙකක් උඩ දැමූ විට කැට දෙකේ ලැබෙන වැඩි අගය හෝ කැට දෙකේ සමාන අගය හෝ ලැබෙන විට පොදු අගය සඳහා සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ලබාගන්න.

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$						

$\sum_{x=1}^{6} P(X = x) = 1$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(i) මාතය

(ii) මධ්‍යන්‍යය

(iii) විචලතාවය

(iv) $P(X < 3)$

(v) $P(X \geq 3)$ සොයන්න.

(b) X සසම්භාවී විචල්‍යය සඳහා පහත සඳහන් සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ඇත.

$f(x) = kx^2(2-x)$; $0 \leq x < 2$ වන විට

$= 0$; අනෙක් විට

(i) k හි අගය (ii) E (X)

(iii) Var (X) (iv) මාතය (v) $P(1 < X < 2)$

ආශ්‍රිත ග්‍රන්ථ

- Bostock, L. and Chandler, L. Pure Mathematics I
  Stanley Thrones (Publishers) Ltd., 1993

- Bostock, L. and Chandler, L. Pure Mathematics II
  Stanley Thrones (Publishers) Ltd., 1993

- Crawshaw, J. and Chambos, J., A concise couse in A-Level Statistics
  ELBS, Stanley Thrones (Publishers) Ltd., 1992

- උසස් පෙළ සංකරණ සංයෝජන, සම්භාවිතාව සහ සංඛ්‍යානය, අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව - 1996

- ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය මගින් ප්‍රකාශිත සම්පත් ග්‍රන්ථ
  අනුකලනය
  සංකරණ හ සංයෝජන
  ගණිතමය අභ්‍යුහනය හා ද්විපද ප්‍රමේයය
  බහුපද ශ්‍රිත හා පරිමේය ශ්‍රිත
  අසමානතා
  සංඛ්‍යානය
  ශ්‍රිතයක සීමාව
  සම්භාවිතාව